Universidad de La Laguna | Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

# MEMORIA DEL TRABAJO FIN DE GRADO

# Opciones financieras. El uso de árboles binomiales para la valoración de opciones.

Financial Options. Using binomial trees for option pricing.

Autor: D. Damián Hernández Melián

Tutor: D. Javier Giner Rubio

Grado en Administración y Dirección de Empresas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
Curso Académico 2013 / 14

En San Cristóbal de La Laguna, a 1 de julio de 2013

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

# ÍNDICE DE TABLAS, CUADROS, FIGURAS Y GRÁFICOS

## RESUMEN:

Este trabajo pretende que se conozcan más en profundidad diferentes modelos de valoración de las opciones financieras. Se establecerá un marco teórico en el cual se analizará dónde cotizan este tipo de activos, los principales tipos de opciones, los activos sobre las que éstas se pueden negociar, las principales estrategias de inversión en opciones y todos los elementos que afectan al valor de éstas. A continuación, se presentarán los principales modelos de valoración de opciones, de entre los cuáles nos centraremos en los árboles binomiales por su fácil comprensión, su utilidad y su polivalencia. A partir de aquí, se valorarán algunos tipos de opciones siguiendo éste modelo de manera que se pueda comprobar que se cumple lo dicho en la teoría. Para terminar, estudiaremos el caso de las opciones sobre acciones que reparten dividendos discretos, cuya valoración es un poco más compleja, motivo por el cual han sido desarrollados modelos que simplifican su cálculo. Después de presentarlos, se analizará un caso práctico en el cual se utilizarán todos los modelos estudiados y se compararán los resultados obtenidos, finalizando el trabajo con las conclusiones que se derivan de este análisis.

## ABSTRACT:

This work aims to learn more in-depth financial options. It will establish a theoretical framework which will define where this type of asset traded, the main types of options, the assets on which they can be traded, the main basic strategies that can be followed with investing in options and all elements that affect their value. Having explained this, it will be presented two major options pricing models, among which we will focus in one of them for its usefulness, versatility and easy understanding. From here, it will be valued some types of options following this model so that it can be more easily understood and to verify compliance with the above in theory. Finally, we will study the case of some specific types of options whose value is a bit more complex, which is why some models have been developed to simplify the calculation. After raising them, it will present a case study which will be used by all the models studied and compared between them, getting from here some very interesting conclusions.

# 1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata acerca de las opciones financieras. Las opciones financieras son instrumentos derivados, ya que su precio en el mercado deriva del precio de otros activos en cada momento en el mercado.

Los instrumentos derivados como las opciones cotizan en mercados propios que se encargan de negociar con este tipo de activos financieros y de ofrecer unas determinadas garantías a sus clientes y miembros. En España, las opciones cotizan en el Mercado Español de Futuros Financieros (MEFF), del cual hablaremos a continuación en el trabajo.

Las opciones financieras pueden ser de diversos tipos con respecto a su clasificación y presentan características interesantes dependiendo de la estrategia que queramos seguir o de las expectativas que tengamos del mercado.

Dicho esto, el objetivo general del trabajo se centra en analizar este instrumento financiero, profundizando en el caso concreto de la valoración de opciones sobre acciones que reparten dividendos discretos, que por su gran volumen de negociación es el de mayor importancia.

En este sentido, en el marco teórico introduciremos los principales tipos de opciones que existen, las estrategias básicas que se pueden seguir con la inversión en opciones y los principales modelos de valoración de opciones que más se utilizan en la actualidad.

Centrándonos en la valoración de las opciones, profundizaremos en el modelo binomial de valoración de opciones de Cox, Ross y Rubinstein (1979), el cual no es tan analítico como otros, pero es mucho más versátil y proporciona soluciones bastante precisas.

Dentro de los tipos de opciones, se tratarán de una forma más práctica y aplicada las opciones sobre acciones, las cuales serán resueltas a partir del modelo binomial. Llegados a este punto, se tendrán en cuenta y por separado las opciones sobre acciones que no reparten dividendos y las que sí lo reparten.

La valoración de acciones que no reparten dividendos puede hacerse de forma sencilla con los árboles binomiales. Para ello, a partir de un mismo ejemplo numérico se valorarán los principales tipos de opciones y se compararán sus resultados para ver si cumplen con lo presentado previamente en el marco teórico.

El caso de las opciones sobre acciones que reparten dividendos es un poco más complicado. En general, la mayoría de autores reconoce que hay un modelo que proporciona una solución bastante precisa pero que resulta ineficiente a la hora de implementarlo debido a su complejidad. Es por ello que diversos autores han presentado otros modelos que tratan de simplificarlo y, a la vez, ser capaces de proporcionar resultados lo suficientemente buenos.

Finalmente, se presentarán los principales modelos de valoración que han surgido como alternativa y se aplicarán a un ejemplo numérico para observar los resultados y en qué manera consiguen acercarse o no al resultado del modelo más exacto, aunque más complejo, extrayendo de todo ello el máximo de conclusiones posibles.

# 2. EL MERCADO ESPAÑOL MEFF

## 2.1. ¿QUÉ ES MEFF?

MEFF (Mercado Español de Futuros Financieros) es un mercado secundario oficial regulado por las leyes españolas e integrado en Bolsas y Mercados Españoles (BME), el operador de los Mercados de Valores españoles. Forma parte de un holding que está integrado por MEFF Renta Variable, donde se negocian, compensan y liquidan derivados sobre acciones e índices bursátiles, y MEFF Renta Fija, donde se hace lo mismo con deuda pública, divisas y tipos de interés. Está completamente controlado, regulado y supervisado tanto por la Comisión Nacional del Mercado de Valores como por el Ministerio de Economía.

MEFF ofrece servicios para la negociación y actúa como cámara de contrapartida central de futuros y opciones sobre el IBEX-35, sobre acciones y sobre el Bono Nocional Español. Así mismo, ofrece también servicios de cámara de contrapartida central para repos sobre deuda soberana española.

Dentro de las competencias del MEFF está el determinar variables como el tamaño de cada contrato, el importe de las garantías, las fechas de entrega del activo subyacente y de vencimiento de los contratos, las horas de negociación, la variación mínima del precio o la unidad de cotización.

## 2.2. MIEMBROS

Los miembros del MEFF son un conjunto de agentes autorizados a realizar transacciones en dicho mercado. Estos agentes han de ser sociedades, agencias de valores, entidades de crédito o ESI (Empresas de Servicios de Inversión) autorizadas para actuar en la UE. Estos miembros son los que actúan en el mercado, funcionando como intermediarios financieros para aquellas personas, ya sean físicas o jurídicas, que no reúnan las condiciones para ser miembros del mercado o que, simplemente, no lo sean.

### 2.2.1. Tipos de miembros

Dependiendo de las características que posean y de las competencias que tengan a la hora de operar dentro del mercado, los miembros del MEFF podrán ser: negociadores, negociadores por cuenta propia, liquidadores individuales y liquidadores generales.

a) <u>Miembros Negociadores:</u> se encargan exclusivamente de negociar directamente en el mercado, tanto por cuenta propia como por cuenta de sus clientes. Para ello, han de establecer acuerdos con uno o varios miembros liquidadores generales (dos como máximo) a través de los cuales liquidarán sus operaciones y constituirán las garantías oportunas, ya que éstos no pueden liquidar.
b) <u>Miembros Liquidadores:</u> están capacitados para realizar operaciones tanto por cuenta propia como por cuenta de sus clientes. Responden frente al MEFF del cumplimiento de todas las obligaciones que resulten de los contratos registrados y transmitirán a sus clientes el efectivo o activo subyacente que el MEFF haya puesto a su disposición en relación con los contratos que estén registrados en sus cuentas.
c) <u>Miembros Liquidadores Custodios:</u> estos miembros, aparte de poder realizar las operaciones propias de un miembro liquidador, son Entidad Gestora de

Anotaciones de Deuda del Estado, estando autorizados para la custodia de las garantías a favor del MEFF y actuando así como custodios de los depósitos de garantía establecidos por los miembros liquidadores.

d) Creador de mercado: el creador de mercado no es un tipo de miembro en sí. Se trata de miembros que realizarán operaciones por cuenta propia y cotizarán valores, de manera que se garantice movimiento y liquidez dentro del mercado facilitando la existencia de contrapartida a sus participantes.

## 2.3. PRODUCTOS

El MEFF es un mercado en el que se negocia con productos derivados, es decir, que su precio deriva del valor del activo subyacente correspondiente en un momento determinado, aparte de otras variables que también influyen en el precio.

Así pues, existen diversos tipos de productos con los que se puede negociar en este mercado, los cuales poseen características diferenciadoras entre ellos en base a las cuales podemos obtener determinadas rentabilidades o asumir determinados riesgos.

En este trabajo nos centraremos concretamente en el estudio de uno de los dos tipos de productos que se pueden considerar los más relevantes dentro del MEFF: las opciones financieras.

### 2.3.1. Opciones financieras

Una opción financiera es un contrato entre dos partes a través del cual el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, de comprarle o venderle determinada cantidad de bienes o valores a la parte vendedora del contrato a un precio puesto de antemano y en una fecha futura.

Al contrato de opción de compra se le llama opción call y al contrato de opción de venta, opción put. Estos contratos se negocian en el MEFF porque, como ya hemos dicho, se trata de productos derivados que dependen del precio de otros activos.

Todo contrato de opción está compuesto por una serie de elementos, los cuales vamos a explicar a continuación:

a) Comprador: es el que adquiere la opción, ya sea de compra o de venta. Al hacerlo adquiere el derecho de comprar o vender el activo, por tanto, ejercerá la opción o no la ejercerá dependiendo de si le conviene o no.
b) Emisor: es quien vende la opción. Está obligado a cumplir con el contrato si el comprador decide ejercerla, tanto si le conviene como si no. Es por ello por lo que cobra un precio al comprador para tratar de compensar esa situación de desventaja.
c) Prima: es el precio de la opción que paga el comprador al emisor por obtener el derecho de compra o de venta sobre el activo del que se trate. La cuantía de la prima puede cambiar dependiendo de diversas variables.
d) Activo subyacente: es el bien o valor el cual el comprador tiene el derecho de comprar o vender según su conveniencia. Dicho activo subyacente suelen ser acciones, divisas, índices bursátiles, tipos de interés e incluso futuros.
e) Precio de ejercicio: también conocido como precio strike, es aquel al que se tiene derecho a adquirir o vender el activo subyacente durante el periodo de

vida de la opción. Este precio puede tomar tres consideraciones dependiendo de cuál sea el precio de mercado del activo subyacente en cada momento:

   a. "In the Money": si no consideramos el precio de la prima, el precio de ejercicio de una opción está "in the Money" o "en el dinero" cuando el propietario de la opción ganaría dinero si decidiera ejercerla en ese mismo instante.
   b. "At the Money": "a dinero". Se da cuando el precio de ejercicio está muy próximo al precio de mercado del subyacente, de manera que el propietario de la opción ni ganaría ni perdería si la ejerciera en ese instante.
   c. "Out of the Money": en el caso "fuera del dinero", el comprador de la opción perdería dinero si decidiese ejercer la opción en ese momento.

f) Fecha de vencimiento: es la fecha en la cual el comprador decide si ejerce la opción o no o la fecha límite hasta la cual el comprador puede decidir ejercerla, dependiendo de que se trate de opciones europeas o americanas, respectivamente. Estos tipos de opciones los comentaremos más adelante.
g) Garantías: se calcula de manera diferente dependiendo del mercado de opciones en el que compremos la opción y la ha de depositar el vendedor a la Cámara de Compensación con objeto de asegurar el cumplimiento de su obligación.

En el caso de que el comprador decida ejercer su opción (call o put), llegará el momento de la liquidación del contrato. Para ejercerla, deberá ordenar a su agente que se lo notifique a la Cámara, la cual se lo notifica a otro agente con clientes que estén en la situación de tener que cumplir con esa obligación. Este último agente, mediante un criterio de selección justo (aleatorio, FIFO, etc.) selecciona a uno de esos clientes para que entregue el activo subyacente o el precio de ejercicio, dependiendo de si se trata de una opción de compra o de venta respectivamente.

En el caso de la opción call, la liquidación podrá hacerse de dos formas: mediante la entrega efectiva del activo subyacente o la liquidación "por diferencias", por la cual el emisor deberá pagar al comprador la cantidad que éste ha ganado ejerciendo la opción.

Aquellos contratos de opciones que no se hayan ejercido aún al término de la fecha de vencimiento expirarán sin valor alguno.

## 2.4. CONTRATOS Y NEGOCIACIÓN

### 2.4.1. Contratos

Los contratos negociados en el MEFF, ya sea de futuros, opciones o de cualquier otro tipo deberán estar representados exclusivamente mediante anotaciones en cuenta.

En las condiciones generales de los contratos han de establecer, entre otros, características como la denominación de los contratos, sus características y formas de liquidación, el grupo de contratos al que pertenece, funciones que MEFF llevará a cabo en relación con los contratos, etc.

Además, los derechos y obligaciones a los que tengan que hacer frente los inversores por el establecimiento de cada contrato surgen desde que MEFF los anota en el Registro Central.

### 2.4.2. Negociación

Como ya se ha mencionado, para poder negociar en el MEFF los clientes han de hacerlo a través de miembros del mercado que estén capacitados para hacerlo. Al ponerse en contacto con ellos, les transmitirán las órdenes que deberán ejecutar. Dichas órdenes deberán especificar indicaciones como: signo de la operación (si es compra o venta), cantidad, vencimiento, precio, etc. Una vez dada la orden, el miembro accederá al mercado para hacerla efectiva por medio del sistema electrónico o el telefónico.

El sistema electrónico permite a los miembros, a través de su propio ordenador, conectar en tiempo real con el ordenador central de la Cámara e introducir directamente la orden. Este sistema, aparte de permitir realizar muchos más tipos de órdenes que el telefónico, se transmite a tiempo real, de manera que todo se hace de una forma más agilizada, rápida, segura y con menores costes. Con este método, se puede ver las características de las negociaciones a cada minuto, favoreciendo los principios de unidad de precio, publicidad de las operaciones y anonimato de las partes contratantes.

El sistema telefónico consiste en contactar a través del teléfono con un “pool central” formado por operadores encargados de recibir las órdenes y emparejarlas con otras de signo contrario (las de compra con las de venta y viceversa) pero iguales características. Hecho esto, introducirán la operación en el ordenador central para poder hacerla pública en el mercado. Con este sistema, la gama de órdenes que se pueden ejecutar es mucho más limitada.

Todas las órdenes transmitidas al sistema de negociación por alguno de estos dos métodos serán vinculantes en el momento en que sean aceptadas por MEFF, salvo que sean canceladas. Las operaciones podrán ser canceladas en cualquier momento siempre y cuando no se hayan ejecutado previamente.

La difusión de la información, sea cual sea el sistema de contratación utilizado, se realiza a través de las terminales de MEFF Renta Fija y MEFF Renta Variable y por las pantallas Reuter. También se realiza difusión de forma periódica en el boletín diario.

En cuanto al funcionamiento del mercado, el horario de negociación es de 8 a 17.15 horas de lunes a viernes en MEFF Renta Fija y de 9 a 17.30 horas en MEFF Renta Variable en los días hábiles.

# 3. LAS OPCIONES FINANCIERAS

En este apartado trataremos de manera más detenida todo lo relativo a las opciones financieras. Veremos los tipos de opciones que existen según su clasificación, las estrategias básicas o las posiciones que se pueden adoptar al negociar con este tipo de productos y el concepto de prima, dentro del cual hablaremos de los factores que afectan a su valor y de los principales modelos de valoración de opciones.

## 3.1. CONCEPTO

Como se dijo en el capítulo 2 de este trabajo, una opción es un producto financiero cuya posesión da derecho a comprar o vender un determinado activo en una fecha futura a un precio fijado de antemano.

El hecho de que otorgue a su titular el derecho y no la obligación de comprar o vender un activo es lo que lo diferencia principalmente de un futuro. Es por ello también por lo que la forma de adquirirlos y de negociar con ellos es un tanto diferente que la de los futuros financieros.

## 3.2. TIPOS DE OPCIONES

Las opciones son un producto financiero muy utilizado en la práctica. Esta puede ser una de las razones por las que existan diversos tipos de opciones atendiendo a la forma en que las dividamos.

De este modo, las opciones pueden clasificarse según distintos criterios como su naturaleza, el periodo durante el cual la opción puede ser ejercida, el tipo de activo subyacente sobre el que se negocie, el tipo de entrega en la fecha de vencimiento, etc.

Así pues, vamos a ver algunas de las clasificaciones de opciones más habituales y lo que las distinguen principalmente a unas de otras.

### 3.2.1. Según su naturaleza

Atendiendo a la naturaleza de la opción propiamente dicha, éstas se pueden clasificar en dos tipos: las opciones de compra o también conocidas como opciones call y las opciones de venta, conocidas como opciones put.

#### *3.2.1.1. Opciones call*

Una opción call da a su poseedor el derecho a comprar un activo subyacente, a un determinado precio (precio de ejercicio), en una determinada fecha futura o fecha de vencimiento a cambio del pago de una prima en la actualidad. Por el otro lado, el vendedor está obligado a entregar el activo subyacente en dicha fecha y al precio pactado, recibiendo por ello la cuantía de la prima.

#### *3.2.1.2. Opciones put*

La opción put otorga al que la tenga el derecho a vender el activo subyacente, a un precio de ejercicio predeterminado en la fecha de vencimiento de la opción, derecho por el cual ha de pagar una prima al vendedor de la opción, quien está obligado a comprar el activo subyacente en la fecha y a un precio prefijados si el comprador de la opción decidiera ejercerla.

A priori, estas definiciones pueden resultar un tanto complicadas o difíciles de entender. Sin embargo, a lo largo del trabajo las iremos explicando y se podrán comprender mucho más fácilmente.

### 3.2.2. Según el periodo durante el cual puede ejercerse

Según el momento en el que pueda ejercerse la opción se clasifican en opciones europeas y opciones americanas.

Las opciones europeas son las que únicamente pueden ejercerse el día del vencimiento de la opción, no pudiendo ser ejercida en cualquier otro momento.

La opción americana, por el contrario, puede ser ejercida en cualquier momento que se desee, siempre y cuando sea antes de la fecha del vencimiento.

Actualmente, en los mercados organizados, el volumen de opciones americanas que se negocia es superior al de las opciones europeas. Evidentemente, el riesgo que asume el vendedor de una opción americana, ya sea de compra o de venta, es mayor que el que se asume con una opción europea por el hecho de la libertad que proporciona de ejercerla en cualquier momento. Sabiendo esto, se puede llegar a pensar que las opciones americanas tendrán más valor que las europeas. No obstante, ya veremos más adelante como esto no siempre es así.

### 3.2.3. Según el activo subyacente

Los activos subyacentes sobre los cuales se puede negociar una opción son muy variados. Cada tipo de opciones tiene unas características determinadas dependiendo del activo subyacente. Principalmente, éstas pueden ser:

#### *3.2.3.1. Opciones sobre acciones*

El activo subyacente es una acción. El poseedor de la opción tiene la posibilidad de comprar de comprar o vender una acción a un precio diferente al de mercado. Hay que tener en cuenta que el hecho de que se negocien opciones no influye en el número de acciones que existen en el mercado ni representan una mayor liquidez para la empresa. El precio de la acción en el mercado será el que determine el precio de la opción, y si es favorable permitirá ejercer o no la opción según el precio de ejercicio que se haya pactado.

#### *3.2.3.2. Opciones sobre divisas*

El subyacente sobre el que se negocia es el valor de una divisa expresado en términos de otra, lo que conocemos como tipo de cambio. Dependiendo del tipo de cambio entre las dos monedas negociadas en el momento del vencimiento (para las opciones europeas) o en cualquier otro momento (para las opciones americanas), el tenedor de la opción decidirá si la ejerce o no en base al tipo de cambio que se pactó en un principio.

#### *3.2.3.3. Opciones sobre tipos de interés*

Este tipo de opciones suelen instrumentarse como opciones sobre deuda. El activo subyacente son instrumentos de deuda como pagarés del Tesoro, bonos, etc. y, como su propio nombre indica, depende de alguna forma del nivel de los tipos de interés. Así, dependiendo del tipo de interés al que esté el activo subyacente sobre el que se trate la opción, obtendremos un determinado resultado y ejerceremos o no la opción dependiendo de si es favorable o no hacerlo.

#### *3.2.3.4. Opciones sobre índices bursátiles*

La opción se basa en un activo constituido por un índice bursátil representativo de un determinado conjunto de valores de renta variable como son, por ejemplo, las acciones. Los índices suelen representar valores de un mercado conjunto o de un determinado sector y son calculados diariamente mediante diversos métodos. De este modo, dependiendo del valor que hayamos pactado en el contrato de opción, el valor que tome ese índice en cada momento determinará el valor de dicha opción. En estos tipos de opciones, el activo subyacente no existe físicamente y no puede ser entregado, de modo que en caso de ejercicio la liquidación se realiza por diferencias entre ambas partes.

#### *3.2.3.5. Opciones sobre futuros*

El activo subyacente es un contrato de futuros sobre otro tipo de activo. El contrato de futuros suele vencer poco después de la expiración de la opción. Si el propietario de una call sobre futuros decide ejercerla, adquiere una posición compradora (larga) en el contrato de futuros más una cantidad en metálico por el exceso del precio del futuro por encima del precio de ejercicio. En el caso de una opción put, el que la ejerce obtiene una posición vendedora (corta) en el contrato de futuros y también la diferencia del precio de éste con el precio de ejercicio en metálico.

## 3.3. ESTRATEGIAS BÁSICAS CON OPCIONES

El hecho de comprar o vender una call o una put nos permite obtener distintas rentabilidades o beneficios en determinadas circunstancias. Así, dependiendo de cuáles sean nuestras necesidades o nuestras expectativas elegiremos comprar o vender un tipo de opción u otra según nos convenga.

Existen cuatro tipos de estrategias básicas: compra de una opción de compra, compra de una opción de venta, venta de una opción de compra y venta de una opción de venta. Cada una de ellas tiene unas características diferenciadoras y suelen ser utilizadas en determinados escenarios. Dicho esto, veamos cada una de estas estrategias por separado.

### 3.3.1. Compra de una opción de compra

La opción de compra se adquiere cuando el inversor tiene expectativas alcistas en el precio del activo subyacente del que trate la opción.

Si se cree que el precio del subyacente va a subir, este tipo de estrategia es muy interesante, ya que te permite comprar a un precio pactado un activo que estará en el mercado a un precio mayor, obteniendo un beneficio. En este sentido, las posibilidades de beneficios son "ilimitadas", ya que cuanto más aumente el precio del subyacente más ganaremos, mientras que las pérdidas en las que incurriremos si el precio del activo finalmente no sube serán lo que hayamos pagado por la prima (ver figura 3.1.).

El llevar a cabo esta estrategia resulta favorable cuando se prevé una tendencia alcista del activo, ya que es más barato pagar la prima de la opción que comprar una acción, por ejemplo. Además, cuando se tiene estas expectativas de tendencia alcista pero no se dispone en el momento de los fondos necesarios para adquirir el activo, la compra de una call permite aprovechar estas subidas sin necesidad de comprar el activo directamente.

A parte de todo esto, el apalancamiento con las opciones resulta también beneficioso si se sabe utilizar, puesto que la relación rendimiento/inversión es muy alta y con pequeñas inversiones se pueden obtener grandes beneficios. No obstante, si el mercado no nos favorece podemos llegar a perder todo lo invertido.

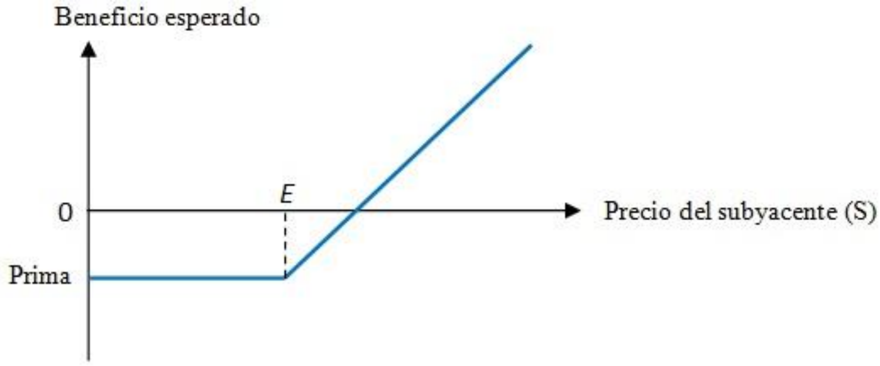


*Figura 3.1.: Compra de una opción de compra.* Fuente: elaboración propia.

### 3.3.2. Compra de una opción de venta

Con la compra de una opción de venta estamos comprando el derecho a vender un activo a un determinado precio. Así pues, esta estrategia es un instrumento a utilizar cuando se cree en una tendencia bajista en los precios de un activo.

El inversor puede vender su opción antes del vencimiento o ejercer la opción, para lo cual habrá adquirido el activo en el mercado y lo habrá vendido a un precio mayor (el precio de ejercicio). De esta forma podrá conseguir beneficios siempre y cuando se cumpla la bajada de precios que preveía.

Al igual que sucedía antes, las pérdidas obtenidas son como máximo la cuantía que se haya pagado por la prima, mientras que los beneficios irán aumentando progresivamente a medida que caiga el precio del activo subyacente (ver figura 3.2.).

Sabiendo esto, la compra de una put resulta interesante en situaciones como cuando se tienen acciones cuyo precio se espera que caiga a corto plazo pero que a largo plazo sigan una tendencia alcista, de manera que con la put nos podamos beneficiar de esa bajada de las acciones a corto plazo sin tener que desprendernos de ellas, aprovechando así la futura subida de precios de la acción.

### 3.3.3. Venta de una opción de compra

En esta estrategia el vendedor de la opción obtiene inmediatamente el valor de la prima en metálico, motivo por el cual asume la obligación de vender el activo subyacente al precio pactado al comprador de la opción si éste decidiera ejercerla (ver figura 3.3.).

El beneficio obtenido es el pago recibido en concepto de prima de la opción. Este beneficio se producirá cuando el mercado del activo subyacente tenga una tendencia estable o bajista (sobre todo si no se posee el activo), ya que al comprador no le será favorable ejercer la opción y, además, si no tenemos el activo no sufriremos esa disminución en su valor.

En estos casos el tiempo juega a favor del vendedor, ya que cuanto menos tiempo falte para el vencimiento el 'valor tiempo' tenderá a cero. Sin embargo, de no cumplirse sus expectativas las pérdidas en las que puede incurrir son 'ilimitadas', aumentando al mismo tiempo que aumenta el precio del activo.

Este tipo de estrategia es interesante porque la obtención de la prima genera un flujo de liquidez inmediato; si se posee el activo (call cubierta) y el precio finalmente baja, el pago recibido por la prima hará que el momento en el que se incurre en pérdidas debido a la bajada del precio del activo se retrase; supone una rentabilidad extra en casos en los que el precio del activo se mantiene estable.

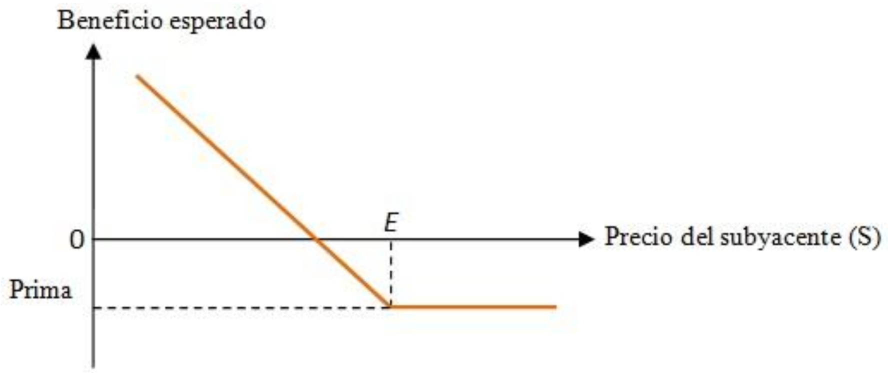


*Figura 3.2.: Compra de una opción de venta*. Fuente: elaboración propia.

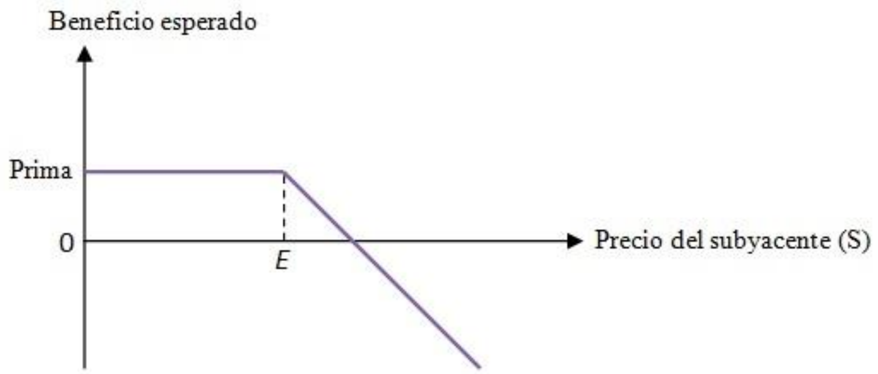


*Figura 3.3.: Venta de una opción de compra.* Fuente: elaboración propia.

### 3.3.4. Venta de una opción de venta

Análogamente a la venta de una opción de compra, el vendedor de una put está vendiendo un derecho al comprador de la put y por el cual cobra la prima. De este modo, asume la obligación de comprar el subyacente en caso de que el comprador de la opción put decida ejercerla.

La venta de una put puede resultar conveniente en los casos en los que se estime una tendencia estable o un tanto alcista del activo subyacente en caso de no poseerlo, ya que si esto se cumple el comprador de la put no ejercerá la opción y el vendedor de la opción se ingresará la prima y se estará beneficiando de una subida del precio del activo sin tenerlo siquiera.

Así, si el precio del activo sube el beneficio que obtendrá el vendedor de la put será la cantidad obtenida por la prima, mientras que si el precio del activo baja el comprador de la opción la ejercerá y deberá adquirir el activo a un precio superior al que podría adquirirla en ese mismo momento en el mercado, con lo que las pérdidas serán cada vez mayores si el precio del subyacente continúa bajando (ver figura 3.4.).

Esta estrategia resulta interesante cuando se estime que el precio del activo mantendrá una tendencia estable o ligeramente alcista. También será positiva en los casos que, conociendo que los precios bajarán, se quiera comprar acciones que en la actualidad estén a un precio demasiado alto a un precio fijo más bajo que el actual (precio de ejercicio), obteniendo además un "descuento", que sería la cantidad recibida como prima al vender la opción.

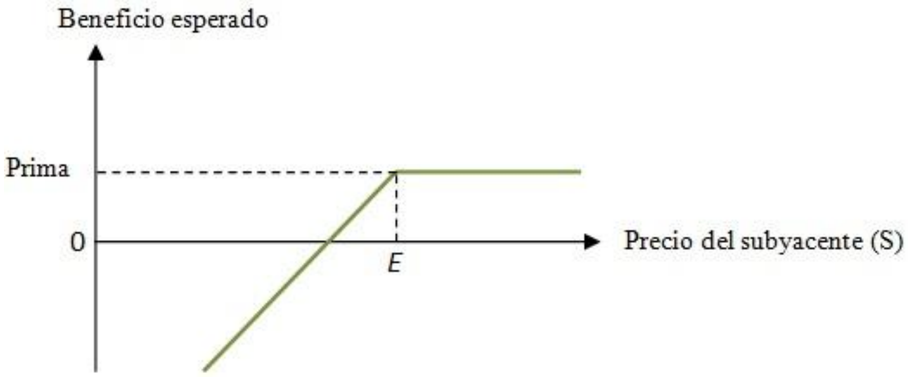


*Figura 3.4.: Venta de una opción de venta.* Fuente: elaboración propia.

## 3.4. EL VALOR DE UNA OPCIÓN: LA PRIMA

Como ya hemos venido diciendo hasta ahora, la prima de la opción no es más que el precio que paga el comprador de la opción por obtener el derecho a comprar o vender el activo subyacente en un determinado momento a un precio ya pactado.

Este valor es el precio al que cotiza en el mercado el susodicho derecho que incorpora la opción. En este sentido, dice Casanovas Ramón (2003) que debemos distinguir en las opciones dos tipos de valores: el valor de mercado y el valor teórico.

El valor teórico está determinado por la oferta y la demanda que existe en el mercado secundario en el que se encuentra la opción, mientras que el valor teórico está determinado por una serie de parámetros o variables que influyen directamente en el valor de la opción. Ambos valores podrán coincidir si el mercado secundario de opciones se comporta de manera eficiente en términos de transparencia y flujo de información, en cuyo caso el valor de la opción será su precio de mercado.

Para Casanovas Ramón (2003), al igual que para Lamothe Fernández (1993), el valor de la prima puede dividirse en dos componentes: el valor intrínseco y el valor temporal.

El valor intrínseco no es más que el valor que tendría la opción en un momento determinado si se ejerciese justo en ese momento, es decir, el beneficio que obtendría el comprador si decidiese ejercer la opción. Este valor se expresa como la diferencia entre el precio del activo subyacente menos el precio de ejercicio (en la opción call) o el precio de ejercicio menos el precio del activo subyacente (en la opción put). Este valor determina que una opción esté 'in the money', 'at the money' o 'out of the money'.

El valor temporal es aquel que surge como consecuencia de las expectativas de los inversores en opciones. En el caso de una call estas expectativas serán alcistas, por lo que un comprador estará dispuesto a pagar un importe superior al valor intrínseco de la opción en ese momento si espera que con esa tendencia acabará obteniendo un beneficio. Por su parte, el vendedor exigirá una prima superior a fin de cubrirse de ese posible riesgo de subida en los precios. Con las opciones put sucede exactamente lo mismo con la diferencia de que las expectativas del comprador de la opción son bajistas.

Sabiendo esto, si una prima no tiene valor intrínseco su valor será exclusivamente temporal como reflejo de las expectativas que tienen los inversores de que el valor intrínseco de la opción pueda aumentar.

### 3.4.1. Factores que influyen en el valor de una opción

Tanto en el valor intrínseco como en el valor temporal existen variables que influyen en el valor que éstos toman, de manera que la prima está sujeta siempre a cambios continuos como respuesta al efecto que producen estas variables.

Para Adell Ramón y Romeo García (1996), la prima es el único término del contrato de opción que no está estandarizado y que evoluciona en función a cinco factores: el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo hasta el vencimiento, el tipo de interés y la volatilidad del activo subyacente.

Mascareñas (2012) señala prácticamente los mismos factores pero añade uno más. Para él, los parámetros que influyen en el precio de la opción son: el valor intrínseco del activo subyacente, el precio de ejercicio, la volatilidad del activo subyacente, el tiempo de vida de la opción, el tipo de interés sin riesgo y los dividendos.

Los mismos factores que Mascareñas los contempla Lamothe Fernández (1993) también. No obstante, Lamothe va un poco más allá y los divide en dos grupos según se trate de factores que vengan determinados por el mercado y generales a cualquier tipo de contrato o de factores que representen características específicas de cada contrato de opción. Así, distingue:

- Determinantes exógenos del valor de una opción: el precio del activo subyacente, la volatilidad de éste, los dividendos y el tipo de interés.
- Determinantes endógenos del valor de una opción: el plazo hasta el vencimiento de la opción y el precio de ejercicio.

Por último, tenemos la consideración de Casanovas Ramón (2003), quien también admite la existencia de seis factores influyentes en el valor de la prima. Sin embargo, a diferencia de los dos autores anteriores, no considera los dividendos como tal, sino que incluye a la oferta y la demanda del mercado como un factor en sí mismo.

Cabe destacar, además, que Grandío Dopico (2010) y Casanovas Ramón (2003) coinciden en que el valor tiempo de una opción depende principalmente de tres variables, que son: el tiempo restante hasta el vencimiento de la opción, el valor intrínseco y la volatilidad del activo subyacente, añadiendo Grandío Dopico una cuarta variable que es el tipo de interés.

Dicho todo esto, vamos a conocer cada una de estas variables expuestas y de qué forma llegan a afectar a la prima de la opción, todas ellas asumiendo la condición *ceteris paribus* por la cual el resto de variables permanece constante:

- El precio de ejercicio de la opción: se trata de un valor fundamental a la hora de calcular el valor de una prima. En una call, cuanto mayor es el precio de ejercicio menor es el valor de la opción, ya que más difícil será que el precio del subyacente lo supere. Lo contrario ocurre con la put, que cuando mayor es el precio de ejercicio mayor es el precio de la opción y viceversa.
- El precio del activo subyacente: la proporción en la que éste afecta al precio de la prima dependerá de las características de la opción y de las circunstancias del mercado del activo subyacente. En una call, cuanto mayor es el precio del subyacente mayor es el valor de la prima, ocurriendo lo inverso con las put, que tienen una prima mayor cuanto más baja el precio del subyacente. Esto sucede porque hace que aumente el valor intrínseco de la opción. Se ha de tener también en cuenta que los movimientos de precios influirán en las expectativas en torno al precio esperado del subyacente en el vencimiento.
- El tiempo hasta el vencimiento: el tiempo es una representación de la incertidumbre que existe en torno al precio de la opción en cada momento, de modo que cuanto más tiempo falte para el vencimiento mayor será la prima, puesto que mayor es la incertidumbre. Esto es válido tanto para las call como las put y confirma el hecho de que cuanto menos falte para el vencimiento el valor tiempo de la opción tiende a cero. Esta relación entre el tiempo no es lineal, sino que es más acusada a medida que nos acercamos al vencimiento, de manera que los compradores de opciones preferirán negociar con opciones con un plazo de vencimiento lejano porque aumenta la probabilidad de que el subyacente tome valores más favorables para ellos, mientras que los vendedores preferirán que éste sea corto al reducirse la incertidumbre que producen las posibles variaciones en el precio.
- El tipo de interés libre de riesgo: no tiene un efecto tan importante como lo pueden tener otras variables. En las call, una subida de los tipos de interés provoca un aumento del precio de la prima, ya que al tratarse de un derecho que permite una compra aplazada, el valor actual del precio de ejercicio será más pequeño. En las put sucede lo contrario por esta misma razón, por lo que un aumento de los tipos de interés produce una disminución en los precios de la put.
- La volatilidad del activo subyacente: la volatilidad indica la variabilidad en el rendimiento del activo subyacente. Si es muy volátil y varía mucho el precio de las opciones, tanto call como put, aumenta. Sin embargo, si la volatilidad es reducida la prima será menor. Esto se explica por el hecho de que cuanto mayor es la volatilidad del activo, mayor será el rango de precios que pueda alcanzar en la fecha del vencimiento, lo que supone un mayor riesgo para el vendedor de la opción y mayores probabilidades de beneficio para los compradores, de modo que a mayor riesgo, mayor precio de la prima.
- Los dividendos: en los mercados de acciones, por ejemplo, se conoce que si una acción reparte dividendos provoca una disminución en el precio de la acción o que éste no suba tanto como debiera, ya que los dividendos "descuentan" del precio de la acción las cantidades repartidas. Esta disminución favorecerá a los compradores de opciones put en la medida en que será más probable que el precio de la opción se sitúe por debajo del precio de ejercicio y perjudicará a los compradores de opciones call. De este modo, los dividendos provocan un descenso en la prima de las opciones call y un aumento en la prima de las put. También puede ser aplicable en opciones sobre divisas, considerando como dividendo el tipo de interés de la divisa en cuestión.

- La oferta y la demanda del mercado: afirma Casanovas Ramón (2003) que, al igual que ocurre en otros mercados, una elevada oferta de opciones producirá una bajada en su precio, mientras que una demanda importante provocará que la prima de las opciones suban.

A modo de resumen, podemos ver de una manera clara y más sencilla la influencia que tiene cada uno de estos parámetros en el precio de las opciones call y put a través del siguiente cuadro:

| A mayor… | Valor de la CALL | Valor de la PUT |
|---|---|---|
| Precio de ejercicio | - | + |
| Precio del subyacente | + | - |
| Tiempo hasta vencimiento | + | + |
| Tipo de interés libre de riesgo | + | - |
| Volatilidad del subyacente | + | + |
| Dividendo | - | + |
| Demanda | + | + |
| Oferta | - | - |

*Cuadro 3.1.: Influencia de los parámetros en el precio de la opción.* Fuente: elaboración propia.

### 3.4.2. Modelos de valoración de opciones

Teniendo en cuenta el elevado número de factores que influyen en el precio de una opción, puede parecer que valorarlas sea una tarea muy complicada y ardua. No obstante, desde la década de los setenta existen modelos de valoración que permiten ajustar con bastante precisión el valor de una prima teniendo en cuenta todos estos parámetros influyentes. De hecho, son los métodos que se siguen utilizando generalmente en la actualidad debido a su precisión y adaptabilidad.

Estos métodos son principalmente dos:

- El modelo Black-Scholes, de Fisher Black y Myron Scholes (1973).
- El modelo binomial, de Cox, Ross y Rubinstein (1979).

#### *3.4.2.1. Modelo Black-Scholes*

El modelo Black-Scholes es un modelo que se creó en un principio para valorar opciones europeas sobre acciones y que posteriormente (1983) fue adaptado por Garman y Kohlagen para calcular el precio de opciones europeas sobre divisas.

Este modelo tiene en cuenta la valoración del arbitraje y suele ser bastante empleado por el hecho de que proporciona una solución analítica en un solo paso con una única ecuación, por lo que resulta más rápido de calcular que el binomial. No obstante, este modelo es menos flexible que el binomial, con lo cual no puede aplicarse a todos los casos y en él se asumen cosas que pueden no encajar del todo con la realidad.

El modelo Black-Scholes se basa en una serie de hipótesis básicas:

- Se basa en un “mercado financiero perfecto”, donde los inversores pueden pedir prestado dinero sin limitaciones y también prestar sus excedentes de liquidez, todo ello a un tipo de interés constante para todo el periodo.
- No hay costes de transacción ni de información.

- No hay impuestos.
- Las acciones consideradas no reparten dividendos durante el periodo.
- Las opciones son de tipo europeo (lo cual es una limitación).
- El precio del activo sigue una distribución normal logarítmica, distribuyéndose los rendimientos normalmente.

Con la simple introducción en la fórmula de las variables tiempo hasta vencimiento, interés libre de riesgo, precio de ejercicio, volatilidad y precio del subyacente, se puede obtener un valor fiable del valor de la opción de manera instantánea, lo que permite determinar si una opción está infravalorada o sobrevalorada en un momento dado.

Dicho esto, según Hull (1996), la fórmula de valoración de una opción de compra por este modelo sería la siguiente:

$$c = SN(d_1) - Ee^{-rt}N(d_2)$$

Siendo $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ,

Donde:

- *N*(.)*:* función de distribución acumulada de la normal estándar.
- *T:* tiempo hasta el vencimiento.
- *c:* valor de la opción call.
- *E:* precio de ejercicio.
- *S:* precio de la acción a día de hoy.
- *r:* tipo de interés libre de riesgo.
- σ: volatilidad de la acción.

Black y Scholes pensaban que un inversor racional nunca ejercería una opción de compra antes del vencimiento, coincidiendo el valor de la call europea y americana. Aplicando la paridad put-call, determinan otra fórmula para hallar el valor de una put europea:

$$p = Ee^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

En definitiva, se trata de un modelo sencillo, bastante preciso y fácil de utilizar pero que presenta algunas limitaciones como que no permite hallar el valor de opciones put americanas puesto que podría ser favorable ejercerlas antes de vencimiento, no admite el cálculo de opciones sobre acciones que reparten dividendos y sólo admite opciones cuyo activo subyacente sean acciones o, utilizando la adaptación de Garman y Kohlagen, divisas.

#### *3.4.2.2. Modelo binomial*

El modelo binomial fue presentado por Cox, Ross y Rubinstein en 1979. Se trata de un modelo un tanto más trabajoso a la hora de aplicarlo al cálculo de opciones pero que, sin embargo, puede llegar a ser tan preciso como el de Black-Scholes, aparte de tener la ventaja de ser más versátil que éste, pudiendo valorar más tipos de opciones.

Puesto que lo vamos a utilizar para la valoración de distintos tipos de opciones en el capítulo 5 del trabajo, el siguiente capítulo lo dedicaremos a definir este modelo y todas sus características, incluyendo la convergencia con el modelo Black-Scholes.

# 4. MODELO DE VALORACIÓN BINOMIAL

## 4.1. CONCEPTO

El modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein surge como un modelo alternativo al ya existente de Black y Scholes, permitiendo calcular más tipos de opciones de lo que lo hacía el anterior. Además, aplica una matemática mucho más sencilla.

Este modelo puede ser aplicado tanto a opciones europeas como americanas, a opciones sobre acciones, sobre divisas, sobre índices e incluso sobre futuros. También permite el cálculo de opciones sobre activos que reparten dividendos.

Alguna de las hipótesis básicas que comprende este modelo, basándonos en lo expuesto por Casanovas Ramón (2003) y Lamothe Fernández (1993) son las siguientes:

- Eficiencia y profundidad de los mercados.
- Ausencia de costes de transacción y de información.
- Ausencia de impuestos.
- El inversor puede pedir dinero prestado o invertir excedentes de liquidez sin limitaciones y al mismo tipo de interés.
- Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea.
- El precio del subyacente sigue un proceso binomial multiplicativo a lo largo de determinados periodos de tiempo discretos establecidos hasta el vencimiento de la opción.

Esta última hipótesis está relacionada con el hecho de que se denomine al modelo de esta manera (binomial), puesto que implica que el precio del subyacente tomará dentro de cierto periodo de tiempo dos valores posibles. Así sucesivamente con cada valor en cada periodo, de manera que el número de precios posible se incrementa con el número de periodos considerado hasta llegar al vencimiento.

Si llamamos $S$ al precio del activo subyacente en un momento dado, éste podrá aumentar hasta $Su$ al final del periodo 1 con una probabilidad de $p$ o disminuir hasta $Sd$ con una probabilidad de $1 - p$. Si repetimos esta situación en cada precio con cada periodo y lo representamos gráficamente, obtendremos una figura que permite ver de manera rápida y esquemática la posible evolución que puede tomar el precio del activo subyacente. A esta figura se le conoce comúnmente como ‘árbol binomial’.

## 4.2. ÁRBOLES BINOMIALES

El árbol binomial es una herramienta utilizada por el método binomial para llegar al valor de la opción. Este árbol representa las diferentes trayectorias que puede tomar el precio del subyacente en cada periodo hasta el final de la vida de la opción.

El árbol que construyamos para el cálculo del valor de la opción será mayor y más complejo cuantos más periodos consideremos. En este apartado vamos a conocer cómo se obtiene y calcula el árbol utilizando un periodo, dos periodos y su extensión hasta $n$ periodos.

### 4.2.1. Árbol binomial de un periodo

Como mencionamos antes, el precio de un activo subyacente ($S$) puede pasar a ser $Su$ con una probabilidad $p$ o ser $Sd$ con una probabilidad $1 - p$, considerando que la opción tiene un tiempo de vida $T$ (expresado en años). Para que estos precios sean así, se debe cumplir que $u>1$ y $d < 1$.

También se debe verificar que se cumple la condición $u > 1 + r > d$ (siendo $r$ el tipo de interés libre de riesgo, puesto que en el caso de que $1 + r$ fuese menor que $u$ y $d$ sería más rentable adquirir directamente el activo subyacente en vez de la opción, y si fuera mayor que ambos nadie compraría el activo subyacente a ese precio, con lo que bajaría la demanda y a través de la ley de oferta y demanda el mercado haría que el precio del subyacente se situase en un valor que permita que se cumpla la primera condición.

En el periodo cero, para un valor $S$ del activo, la opción tiene un valor $f$. Al variar el precio del subyacente, la opción pasa a tener un valor $f_u$ o $f_d$ dependiendo de si el precio subió o bajó, respectivamente. El árbol binomial de un periodo resultante sería el siguiente:

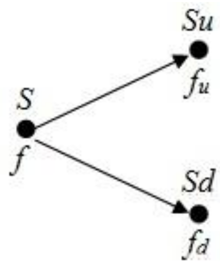


*Figura 4.1.: precio de la acción y de la opción para un árbol de un periodo.* Fuente: Hull (1996).

Los valores de la opción en la fecha del vencimiento, es decir, en el último periodo, se valoran siempre por su valor intrínseco dado que en este momento el valor tiempo es cero. Teniendo esto en cuenta los valores de $f_u$ y $f_d$ serían:

$f_u = c_u = máx\ (0, Su - E)$ y $f_d = c_d = máx\ (0, Sd - E)$ para opciones call.

$f_u = p_u = máx\ (0, E - S_u)$ y $f_d = p_d = máx\ (0, E - Sd)$ para opciones put.

El valor $f$ de la opción en este caso será el valor actualizado al tipo de interés libre de riesgo de la suma de las probabilidades de ocurrencia de los valores de la opción $f_u$ y $f_d$ en la fecha de vencimiento por el valor de éstos, obteniendo la siguiente expresión:

$$f = e^{-rT}\ [p\ f_u + (1 - p) f_d]$$

### 4.2.2. Árbol binomial de 2 periodos

Ya sabemos que el método binomial emplea un proceso binomial multiplicativo en el cual de cada posible valor de la acción se desprenden dos valores más en el caso de que añadamos otro periodo.

De este modo, a partir de cada uno de los dos nódulos del periodo 1 calculamos otros dos nódulos más para cada uno de ellos. Sin embargo, en el periodo 2 no vamos a obtener cuatro nódulos nuevos sino tres, debido a que la relación entre los valores $u$ y $d$ es inversa entre ambos. Así, si en el periodo 1 el activo ha subido de precio, una bajada en el periodo 2 provocará que el precio obtenido sea nuevamente el inicial, dada la relación inversa ya mencionada.

Sabiendo esto, el árbol binomial de dos periodos tendría la siguiente forma:

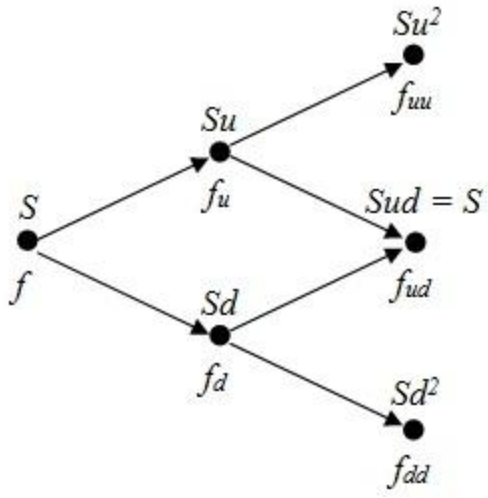


*Figura 4.2.: Árbol binomial de 2 periodos.* Fuente: Hull (1996).

En este caso, la resolución empieza a complicarse, aunque siga resultando sencillo. Para resolverlo hay que tener en cuenta algunas cosas:

- Si $T$ es el tiempo transcurrido hasta el vencimiento de la opción, $\Delta T$ será el tiempo que transcurre de un periodo a otro (medido en años).
- Para poder calcular el valor de los nódulos del periodo 1 debemos calcular primero los nódulos del periodo 2, cuyo valor será el valor intrínseco de la opción.
- Además de calculándolos de atrás hacia delante, el árbol binomial de dos pasos posee una expresión para averiguar directamente el valor de la opción. Esta expresión es la siguiente:

$$f = e^{-2r\Delta T}[p^2 f_{uu} + 2p\,(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

Esta valoración resulta bastante rápida y fácil de calcular si consideramos opciones europeas. Sin embargo, en las opciones americanas, el hecho de tener la posibilidad de ejercer la opción antes del vencimiento permite obtener el valor intrínseco en un momento dado antes de finalizar la vida de la opción. Sabiendo esto, sería prudente revisar el valor de cada nódulo para saber qué vale más en el caso de la opción americana, si el valor teórico o el valor intrínseco.

No obstante, aunque la opción sea americana y el valor intrínseco sea superior al teórico puede que no interese o no sea tan favorable como se piensa ejercer antes de vencimiento. Esta cuestión, junto con algunas otras, la veremos más en profundidad en el capítulo 5.

### 4.2.3. Árbol binomial de n periodos

En el caso de considerar más de dos periodos en el árbol binomial, el cálculo de la opción no será tan rápido, puesto que habrá que calcular cada paso en cada periodo a partir de los nódulos del último periodo, cuyos valores son todos conocidos, siendo el valor intrínseco de la opción.

La forma para resolver los árboles es de atrás hacia delante. El valor de la opción es conocido en la fecha del vencimiento (*T*). Así pues, se puede calcular el valor de cada nódulo en el penúltimo periodo como el valor esperado en el momento $T$ descontado al tipo de interés libre de riesgo ($r$) durante un periodo de tiempo $\Delta t$, y así sucesivamente con el resto de nódulos que forman el árbol hasta alcanzar el valor de la opción a día de hoy utilizando la fórmula introducida en el apartado de árboles de un periodo, con la salvedad de que no se actualiza el valor hasta el momento inicial, sino hasta llegar al periodo anterior:

$$f_{T-1} = e^{-r\Delta t}\,[p\,f_u + (1-p)f_d]$$

Puesto que debe cumplirse que $u = \frac{1}{d}$, ya que, como recordaremos, las variables $u$ y $d$ son inversas una respecto de la otra, un modelo de árbol para n periodos con los valores que puede tomar el subyacente sería más o menos así:

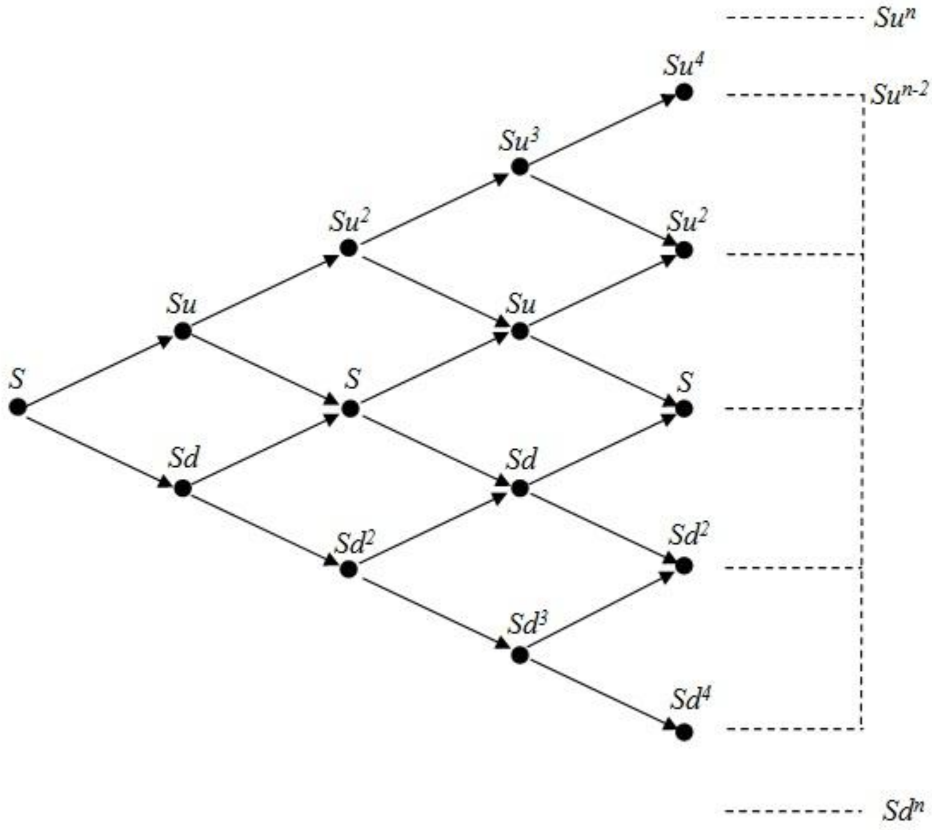


*Figura 4.3.: árbol binomial para n periodos.* Fuente: elaboración propia.

Para casos en los que consideremos la existencia de $n$ periodos existen también dos fórmulas que permiten calcular el valor de una opción call o put en un solo paso. Estas fórmulas son las siguientes (Cox, Ross y Rubinstein, 1979):

$$c = \left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\cdot máx[0, u^j d^{n-j}\cdot S - E]\right]\Big/ \hat{r}^n$$

$$p = \left[ \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \cdot máx[0, E - u^j d^{n-j} \cdot S] \right] \Big/ \hat{r}^n$$

Donde $\hat{r} = 1 + r$

No obstante, estas fórmulas sólo tienen validez en el caso de opciones europeas debido a que, al igual que se mencionó en el caso de los árboles de dos periodos, el valor de la opción americana en cada momento no debe siempre coincidir con el valor teórico que hayamos calculado, ya que puede ser favorable que se produzca el ejercicio antes del vencimiento.

### 4.3. PRINCIPALES VARIABLES DEL MODELO BINOMIAL

El modelo binomial es un modelo matemáticamente sencillo, puesto que no consta de fórmulas ni expresiones demasiado complicadas. Sin embargo, sí existen algunas variables que no vienen dadas de antemano y cuyo cálculo resulta imprescindible para la valoración de opciones siguiendo este método.

Siguiendo las hipótesis básicas del modelo binomial, en este apartado vamos a conocer las expresiones que permiten realizar el cálculo del valor de una opción y veremos de dónde provienen los valores de otras variables (como por ejemplo la volatilidad), cuyo uso resulta totalmente necesario pero que precisan de cálculos más complejos, los cuales no tendría sentido incluir en este trabajo.

Como sabemos, el modelo binomial divide la vida de la opción hasta el vencimiento en intervalos más pequeños, de manera que cuantos más intervalos hayan, más correcto será el valor de la opción calculado. Estos intervalos suponen una variable a tener en cuenta en el cálculo del valor de la opción y se define de la siguiente manera, teniendo en cuenta que $n$ es el número de intervalos en los que se divide el año y que $t$ representa uno de estos intervalos, tomando valores enteros desde [1, $n$]:

$$\Delta t = \frac{t_m}{n} - \frac{t_{m-1}}{n} = \frac{t_m - t_{m-1}}{n} = \frac{1}{n}$$

Otra de las variables a tener en cuenta para calcular el valor de la opción es la volatilidad de las acciones ($\sigma$), la cual se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente y que tiene un cálculo más complejo mediante la utilización de la volatilidad histórica (utilizando un registro de los movimientos del precio de las acciones), las actuales variaciones en los precios de las acciones y las perspectivas que se tengan de éstas en un momento dado.

También influye el tipo de interés ($r$) utilizado en el cálculo del precio de una opción. En el caso de la valoración por árboles binomiales se emplea el principio de valoración neutral al riesgo como ya se ha mencionado con anterioridad, el cual supone que a la hora de valorar una opción sobre acciones se parte del supuesto de que el mundo es neutral al riesgo, es decir: la rentabilidad esperada de todos los valores negociados es el tipo de interés libre de riesgo y los flujos de caja futuros pueden valorarse descontando sus valores esperados al tipo de interés libre de riesgo.

Una vez tengamos el valor de estas variables podremos proceder al cálculo de los valores $u$, $d$ y $p$, imprescindibles para poder realizar correctamente el árbol binomial y comenzar a calcular el precio de la opción. Las fórmulas ya finales para hallar estos valores son las siguientes:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{d}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}$$

$$p = \frac{a-d}{u-d}$$

donde $a = e^{r\,\Delta t}$.

## 4.4. CONVERGENCIA CON EL MODELO BLACK-SCHOLES

Ya sabemos que tanto el modelo de valoración binomial como el modelo Black-Scholes son métodos de valoración de opciones de diversos tipos, y hemos dejado claro que tanto uno como otro están ampliamente aceptados y son totalmente válidos prácticamente desde el momento en que fueron presentados. De hecho, se trata de modelos descubiertos en los años setenta y que aún hoy siguen utilizándose para el cálculo del valor de las opciones.

Siendo esto así, y sabiendo que ambos modelos son correctos y pueden proporcionar estimaciones muy fiables, cabe pensar que, para una serie de parámetros dados de antemano, el valor que proporcione un método u otro no debería variar demasiado.

Esta conjetura es bastante lógica y se cumple en la práctica. No obstante, para llegar a que ambos valores converjan es necesario utilizar bastantes periodos en el modelo binomial para que éste pueda acercarse al valor ofrecido por el modelo Black-Scholes.

La razón de esto es que el modelo Black-Scholes, al calcularse de manera analítica con una única fórmula, considera el tiempo como una variable continua, de modo que al actualizar el valor de la opción obtenemos un valor fiable que podemos considerar como correcto.

Por otro lado, el método binomial calcula el valor de la opción actualizando éste periodo por periodo desde el vencimiento hasta el momento inicial. Así pues, si por ejemplo, en el cálculo de una opción con vencimiento un año utilizamos únicamente dos o tres periodos, estaremos actualizando el valor de la opción semestral o cuatrimestralmente, respectivamente, obteniendo un valor mucho más disperso que el obtenido por el método Black-Scholes ya que se trata al tiempo como si fuera una variable discreta.

En el año 1979, Cox, Ross y Rubinstein ya eran conscientes de esta limitación, la cual tenían en cuenta en su trabajo *"Option pricing: a simplified approach"*. En él, asumen que este modelo nos pueda llevar a pensar que por qué una opción debe tomar únicamente dos valores en un periodo de tiempo dado y en espacios de tiempo tan distanciados si las opciones cotizan en un mercado continuo en el cual pueden tomar cientos de valores distintos durante cada día y variar lo suficiente durante cada hora o, incluso, durante cada minuto.

Para resolver esto, aseguran que no hace falta calcular ninguna probabilidad o ninguna otra forma que tenga en cuenta las variaciones de la opción cada minuto. Cox, Ross y Rubinstein dicen que si $t$ es el tiempo de vida de la opción hasta vencimiento, y $n$ es el número de periodos de duración $h$, entonces: $h = \frac{t}{n}$.

De este modo, al utilizar más y más periodos, $h$ irá tendiendo cada vez más a cero, lo que significa que la duración entre periodos se hace más pequeña, permitiendo evitar la limitación que considerábamos antes y pasando a tratar el tiempo como una variable continua cuando $n \to \infty$, consiguiendo un resultado prácticamente idéntico al que obtendríamos usando el modelo Black-Scholes (ver gráfico 4.1.).

En este sentido, dice Mascareñas (2012) que, para un periodo de tiempo considerado de un año, la vida de la opción debería ser dividida en, al menos, 50 periodos si queremos conseguir unos resultados válidos.

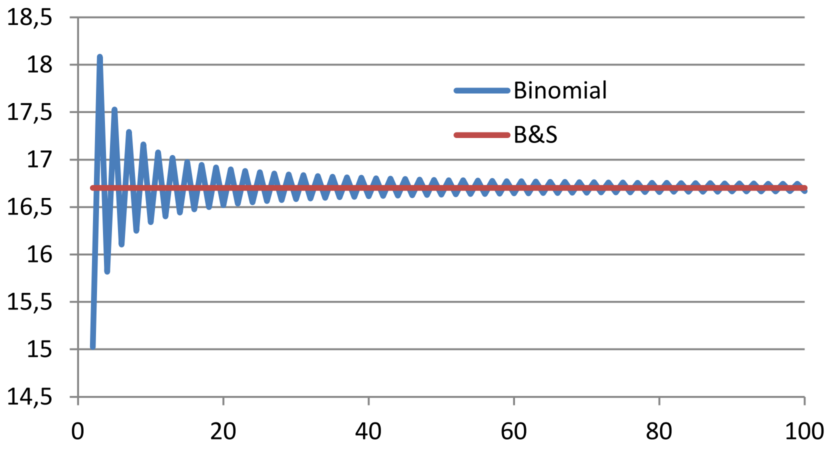


*Gráfico 4.1.: Convergencia del modelo binomial con el modelo B&S.* Fuente: elaboración propia.

En el gráfico 4.1. representamos el valor de una opción call europea sobre una acción de valor $S$ = 100, $E$ = 100, σ = 0,4, $r$ = 0,02 y $T$ = 1 año. Mientras que el valor de Black-Scholes es 16,7, el método binomial converge rápidamente hacia este valor a medida que se aumenta el número de periodos del árbol binomial.

# 5. APLICACIÓN DE LOS ÁRBOLES BINOMIALES EN LA VALORACIÓN DE OPCIONES

## 5.1. VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS Y AMERICANAS

Como ya sabemos de apartados anteriores, la principal diferencia entre las opciones europeas y las opciones americanas es que las europeas sólo permiten el ejercicio de la opción una vez llegada la fecha de vencimiento, mientras que con las americanas se puede ejercer la opción, ya sea de compra o de venta, en cualquier momento con el límite de la fecha de vencimiento.

Sabiendo esto, hay quien podría pensar que valgan lo mismo, puesto que si el precio de ejercicio y la fecha de vencimiento son iguales las opciones también lo son y no importa el hecho de que unas se puedan ejercer antes que otras. También hay quien pensaría que tengan más valor unas que otras, ya que las americanas te dan la libertad de ejercer en cualquier momento y eso es algo que de por sí puede tener un valor.

En este apartado vamos a tratar de analizar los posibles casos que pueden darse y tratar de dar un argumento firme para la respuesta a la pregunta: ¿Valen lo mismo las opciones europeas que las opciones americanas?

De momento podemos decir que depende. Por un lado, las opciones de compra europeas y americanas sí van a tener el mismo valor. Por otro lado, las put europeas van a tener un valor distinto al de las put americanas. Estas respuestas vienen acompañadas de un planteamiento relativamente sencillo que permiten comprenderlas de una manera más clara.

Sin embargo, antes de analizar estas respuestas más detalladamente, vamos a ver un planteamiento que nos permitirá saber cuál es el valor mínimo de una opción, lo que nos será muy útil para saber si una opción está infravalorada en un momento dado o para conocer el valor mínimo al que podríamos venderla en caso de que no pensáramos ejercerla, por ejemplo.

### 5.1.1. El valor mínimo de una opción.

Estas expresiones que vamos a calcular se refieren a opciones sobre acciones que no distribuyan dividendos, existiendo sendas expresiones para las call (ya sean europeas o americanas) o las put (sólo europeas).

#### *5.1.1.1. El valor mínimo de una call*

El límite mínimo para el precio de una opción call europea sobre una acción que no reparte dividendos es:

$$S - E \cdot e^{-rT}$$

Para explicarlo vamos a considerar dos carteras:

- Cartera X: una call europea y una cantidad de dinero igual a $Ee^{-rT}$.
    - <u>Valoración:</u> si invertimos el efectivo, al pasar el tiempo T el dinero valdrá E, que es el precio de ejercicio.
        - Si $S_T > E$, se ejerce la opción y se compra la acción, valiendo ahora la cartera $S_T$.

- Si $S_T < E$, la opción de compra vence y no se ejerce, con lo cual nos quedamos con el dinero, que vale E.

- Cartera Y: una acción.
    - Valoración: esta cartera siempre va a valer $S_T$ en el momento T.
        - Si $S_T > E$, la cartera Y valdrá lo mismo que la cartera X.
        - Si $S_T < E$, la cartera Y valdrá menos que la cartera X.

Así pues, sabemos que el valor de la cartera con la opción valdrá siempre igual o más que la cartera con la acción, quedando la ecuación de este modo:

$$c + Ee^{-rT} \geq S \;\rightarrow\; c \geq S - Ee^{-rT}$$

Dado que lo peor que puede ocurrirle a una opción es que expire sin ningún valor, entonces:

$$c \geq máx\,(S - Ee^{-rT}, 0)$$

Puesto que, como hemos dicho antes aunque no lo hayamos argumentado aún, el valor de una call europea y una americana es el mismo, este valor mínimo es aplicable tanto a un tipo de opción como otro.

*5.1.1.2. El valor mínimo de una put*

La expresión para el cálculo del valor mínimo de una opción de venta europea sobre acciones que no reparten dividendos es la siguiente:

$$Ee^{-rT} - S$$

Consideremos nuevamente dos carteras distintias:

- Cartera W: una opción put europea y una acción.
    - Valoración:
        - Si $S_T < E$, se ejerce la opción de venta y la cartera tiene un valor de E, que es lo que nos han pagado por la acción.
        - Si $S_T > E$, la opción no se ejerce y la cartera valdrá $S_T$, que es lo que vale entonces la acción.

- Cartera Z: cantidad de efectivo igual a $Ee^{-rT}$, que es la cuantía del precio de ejercicio de la opción capitalizada a día de hoy.
    - Valoración: si consideramos que se invierte el dinero al tipo de interés libre de riesgo (r), la cartera valdrá *E* en el momento T.
        - Si $S_T < E$, la cartera Z valdrá lo mismo que la W.
        - Si $S_T > E$, la cartera Z valdrá menos que la W.

Dicho esto, la cartera W siempre tendrá un valor mayor o igual que la cartera Z:

$$p + S \geq Ee^{-rT} \;\rightarrow\; p \geq Ee^{-rT} - S$$

Y como lo peor que le puede ocurrir a la opción es que acabe sin valor, nos queda que:

$$p \geq máx\,(Ee^{-rT} - S, 0)$$

### 5.1.2. ¿Valen lo mismo las opciones europeas que las opciones americanas?

El planteamiento a esta pregunta podría parecer algo complejo o difícil de determinar, pero veremos a continuación como no lo es tanto. Como dijimos anteriormente, la respuesta a esta pregunta no es definitiva, sino que depende de si se trata de opciones call o put.

Es por ello por lo que esta cuestión puede dividirse a su vez en otras dos preguntas, lo cual facilita su comprensión y el desarrollo de los planteamientos necesarios para argumentar la respuesta. Así pues, tenemos:

#### *5.1.2.1. ¿Valen lo mismo las call europeas que las call americanas?*

La respuesta es sí. El hecho de tener una opción americana hace que podamos tener el impulso de venderla antes de llegar a vencimiento y recoger los beneficios en ese mismo momento, ya que podemos pensar que si esperamos hasta el vencimiento luego la opción puede no valer nada y habríamos perdido la prima. No obstante, la elección más rentable va a ser llevarla hasta el vencimiento, coincidiendo su fecha de ejercicio (si fuera beneficioso ejercerla) con la del ejercicio de la opción europea, con lo cual ambos tipos de opciones valdrían lo mismo. En este caso, estamos hablando de opciones de compra sobre acciones que no distribuyen beneficio.

Veamos este planteamiento de manera matemática y con un ejemplo. Para ello, consideraremos de nuevo dos carteras. El precio de la acción es *S= 25 €,* el precio de ejercicio *E=22 €*, el tiempo para vencimiento es *T=0,5* años (6 meses) y el tipo de interés libre de riesgo es *r=5%*.

- Cartera A: una call americana más efectivo por valor de $Ee^{-rT}$.
    - Valoración:
        - El valor del efectivo en el momento T es *E=22 €*.
        - En un momento anterior *t=0,25* (3 meses) será de $Ee^{-r\,(T-t)} = 22 \cdot e^{-0{,}05\,(0{,}5-0{,}25)} = 21{,}73$ €
        - $E > Ee^{-r\,(T-t)}$ siempre que $t < T$, de modo que
        - $S - E + Ee^{-r\,(T-t)} < S$
        - En el momento T el valor de la cartera A= *máx* $(S_T, X)$.
            - Si $S_T < E$, la cartera A vale *E*.
            - Si $S_T > E$, el valor de la cartera A = $S_T$.
- Cartera B: una acción.
    - Valoración (en el momento T):
        - Si $S_T < E$, la cartera B vale menos que la A.
        - Si $S_T > E$, ambas carteras valen igual.

Visto esto, no hay ninguna razón para ejercer antes del vencimiento si $t < T$, ya que la cartera A tendrá como mínimo tanto valor como la B si se lleva a vencimiento. Por tanto, una opción de compra sobre acciones que no pagan dividendos no debería ejercerse nunca antes de vencimiento. Así, llegamos a la conclusión de que ambas tienen el mismo valor: *C = c*.

Otra de las razones de no ejercer hasta vencimiento podría ser el seguro que proporciona. El tener una opción en lugar de las propias acciones asegura al poseedor ante bajadas de la acción por debajo del precio de ejercicio. Una vez se ejerce la opción y se tiene la acción al precio de ejercicio, este seguro desaparece.

Con este argumento demostramos que es más ventajoso mantener la opción. No obstante, un inversor podría estar pensando en actuar a corto plazo, es decir, ejercer la opción al precio de ejercicio y vender inmediatamente la opción a precio de mercado. En este caso, la alternativa de vender directamente la opción sería mucho más rentable, ya que obtendría un mayor beneficio.

Veámoslo con un ejemplo con los datos anteriores:

a) Ejercer la opción y vender la acción: compraría la acción el precio $E = 22$ € para venderla al precio de cotización en el mercado $S_t = 25$ €.

Beneficio = 25 – 22 = 3€

b) Vender la opción directamente: como vimos en el primer apartado de este capítulo, las opciones se pueden vender en el mercado a un precio mínimo. Este precio sería: $c \geq máx\ (S - Ee^{-rT}, 0)$ → $c \geq máx\ (25 - 22 \cdot e^{-0,05 \cdot 0,5}, 0) = máx\ (3{,}54, 0)$.

Beneficio = 3,54€

Así pues, la opción podrá ser vendida a alguien que la mantenga hasta su vencimiento pero no será ejercida, al ser esta alternativa menos favorable.

Además, aparte de todo lo expuesto, está también el argumento del valor del dinero, ya que es preferible pagar el precio de ejercicio lo más tarde posible.

#### *5.1.2.2. ¿Valen lo mismo las put europeas que las put americanas?*

En este apartado vamos a conocer la respuesta a la pregunta análoga a la anterior, de manera que podremos conocer si valen lo mismo las put europeas y las americanas y por qué.

Ya en la introducción del capítulo se mencionó que no valían lo mismo unas que otras. De entrada podemos decir que las put americanas van a tener un valor superior al de las europeas. Esto se debe al hecho de que, en este caso, si es favorable ejercer la opción antes del vencimiento en el momento en que esté lo suficientemente 'in-the-money'. De hecho, se debería ejercer siempre desde el momento en que esto ocurra.

Expliquemos entonces esta conjetura de manera que se pueda ver con mayor claridad. Para ello vamos a utilizar nuevamente un ejemplo con dos carteras distintas y los mismos datos de la explicación anterior.

- Cartera C: una opción put americana y una acción.
  - Valoración:
    - Si se ejerce la opción en el momento $t < T$, la cartera valdrá $E=22$€ (el precio de ejercicio que nos han pagado).
    - Si la opción se lleva hasta vencimiento, el valor de la cartera C = *máx* $(E, S_T)$.
- Cartera D: una cantidad de dinero igual a $Ee^{-rT}$.
  - Valoración:
    - En $t < T$ valdrá $Ee^{-r\,(T-t)} = 22 \cdot e^{-0,05 \cdot (0,5-0,25)} = 21{,}73$€
    - Si se llega hasta $T$, la cartera D tendrá un valor de $E$.

En resumen, si la opción se ejerce antes de vencimiento con suficiente margen la cartera C valdrá siempre más que la cartera D. En cambio, si se espera hasta vencimiento puede ser que valga más la C que la D si $S_T > E$, o que valgan lo mismo si $S_T < E$. Es por ello por lo que resulta más beneficio ejercerla desde que se pueda y, por ejemplo, capitalizar a corto plazo lo obtenido.

El hecho de que la put americana pueda ejercerse antes del vencimiento hace que, como mínimo, el valor que tenga la opción sea el valor intrínseco. De manera que si para una put europea teníamos que $p \geq Ee^{-rT} - S$ , para una americana la expresión será: $P \geq E - S$, manteniendo lo dicho anteriormente.

Como hay circunstancias en las que puede ser deseable ejercer la opción antes del vencimiento, una put americana valdrá siempre más que una europea. En este sentido, puesto que hay situaciones en las que una opción americana vale lo mismo que su valor intrínseco, en esas circunstancias una europea tendrá un valor menor que su valor intrínseco.

A parte de todo este planteamiento matemático, al igual que sucedía con las opciones de compra, el poseer una opción de venta nos proporciona un cierto seguro. Cuando se tiene junto con las acciones, nos asegura ante una posible caída de los precios de estas. Sin embargo, en este caso, en ocasiones puede ser mejor prescindir de este seguro y ejercer antes de llegar al vencimiento.

## 5.2. OPCIONES SOBRE ACCIONES SIN DIVIDENDOS

Después de haber hallado el valor de cada una de estas variables, procedemos a construir el árbol binomial en el que figuran los hipotéticos precios que la acción puede ir tomando en un momento u otro, para posteriormente hallar uno a uno los posibles valores de la opción en cada uno de los nódulos.

Al tratarse de opciones sobre acciones que no reparten dividendos, no debemos preocuparnos por que el valor de éstos produzca disminuciones en el valor de la acción, pudiendo aplicar sin problema lo expuesto en el capítulo 4 del trabajo.

Para su aplicación y comprensión, será mucho más fácil verlo con un ejemplo, de manera que podamos observar cómo cambian los precios de las opciones en cada nódulo cuando se trata de una opción de compra (ya sea europea o americana, puesto que valen igual), una opción de venta europea y una opción de venta americana.

El ejemplo será el mismo y con los mismos datos para los tres casos, donde lo único que cambiará será el tipo de opción que vayamos a emplear. El ejemplo, entonces, sería el siguiente:

Consideremos una opción (ahora veremos por separado cada tipo) sobre acciones que no distribuyen dividendos de INDITEX con una fecha de vencimiento para dentro de 6 meses. Las acciones de INDITEX cotizan a día 12 de junio de 2013 en el mercado a un precio de 98,75 € la acción y el precio de ejercicio de la opción está establecido en 100 €. La volatilidad anual que se presume para estas acciones es del 28% y el tipo de interés libre de riesgo se sitúa en el 4,5% anual.

1. <u>Datos:</u>

$S = 98{,}75; E = 100;\ r = 0{,}045;\ \sigma = 0{,}28;\ n = 12;\ \Delta \mathrm{t} = 0{,}0833.$

2. <u>Cálculo de $u$, $d$ y $p$:</u>

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,28\sqrt{0,0833}} = 1{,}08419$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u} = 0{,}92235$$

$$a = e^{r\,\Delta t} = 1{,}00376$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1{,}00376 - 0{,}92235}{1{,}08419 - 0{,}92235} = 0{,}50302$$

3. <u>Cálculo de los valores de las acciones en el árbol:</u>

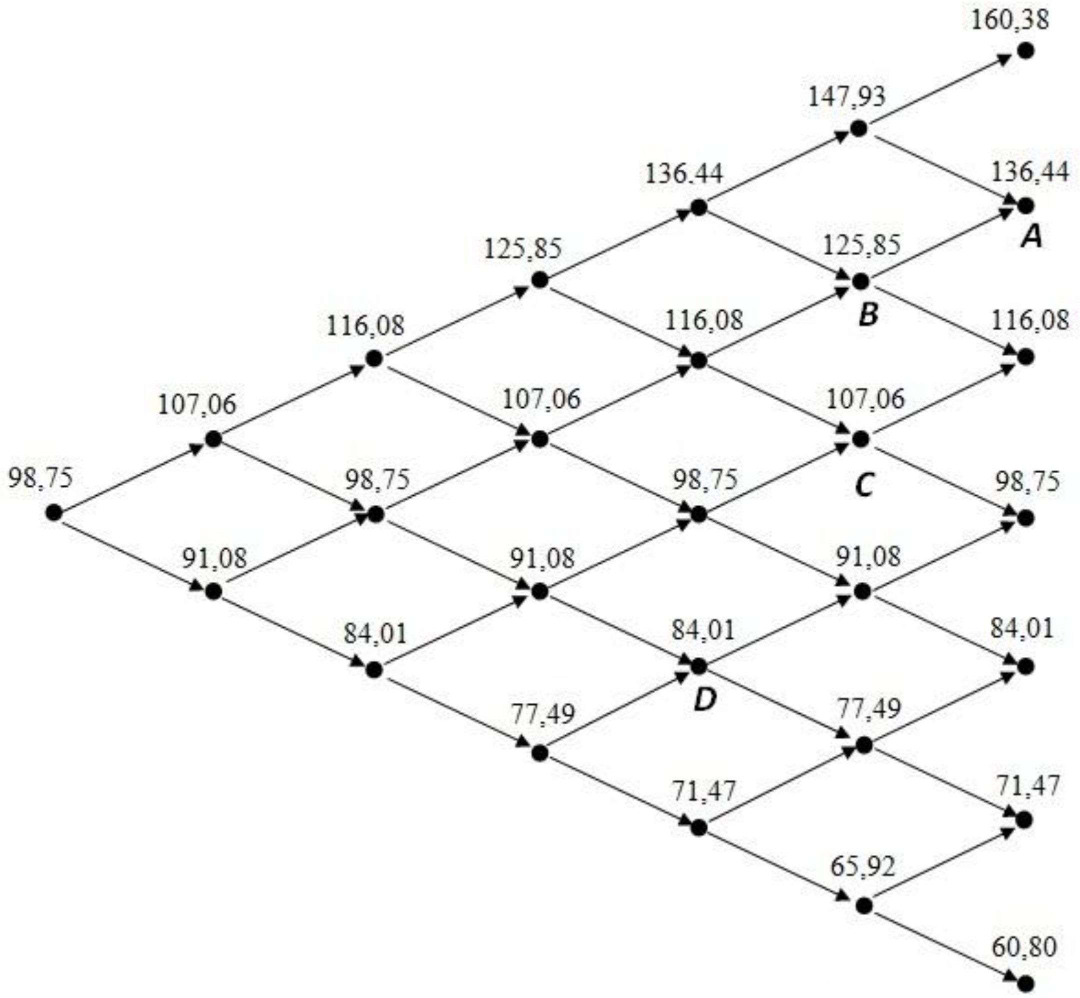


*Figura 5.1.: Árbol binomial con valor de las acciones*. Fuente: elaboración propia.

### 5.2.1. Valoración de una opción call

La valoración de la opción se realiza desde atrás hacia delante. En los nódulos finales (correspondientes a la fecha del vencimiento) el valor de la opción será: $\mathrm{C} = \mathrm{c} = \text{máx}\,(S^{\mathrm{T}} - \mathrm{E}, 0)$, coincidiendo con su valor intrínseco a no ser que se encuentre ‘out of the money’.

P.ej.: el nódulo $A = máx\ (136{,}44 - 100,\ 0) = 36{,}44$

A partir de ahí, los nódulos se calculan como el valor actual del precio de la opción en el momento que estemos considerando, multiplicando las probabilidades halladas $p$ y $1 - p$ por el valor que tendría la opción en caso de aumentar o disminuir el precio de la acción, respectivamente, y sumándolas entre sí.

P. ej.: nódulo $B = (0{,}50302\ x\ 36{,}44 + 0{,}49698\ x\ 16{,}08)\ e^{-0{,}045\ \cdot 0{,}0833} = 26{,}22$

De este modo, calculando los nódulos uno por uno y de atrás hacia delante llegaríamos al valor de la opción, obteniendo como resultado el siguiente árbol, donde el valor de arriba es el precio de la acción y el de debajo el de la opción.

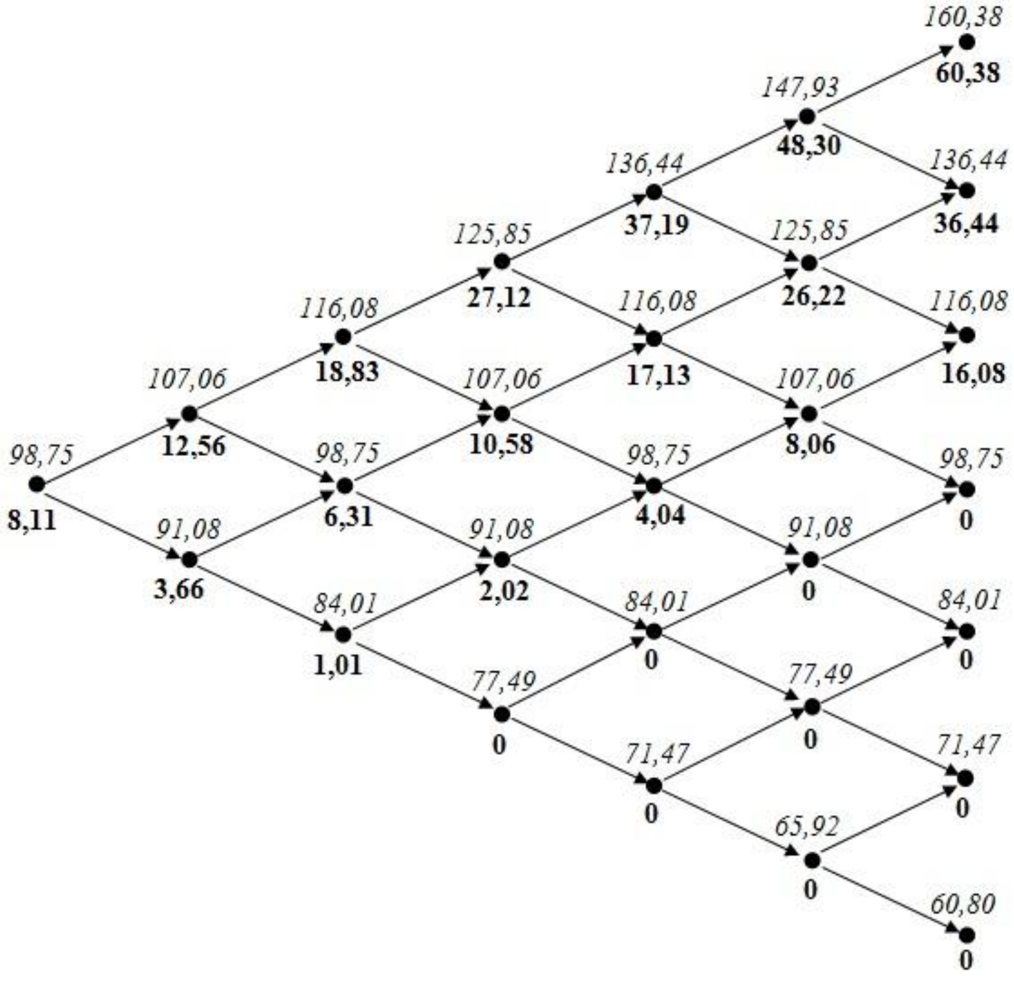


*Figura 5.2.: Árbol binomial para una opción call.* Fuente: elaboración propia.

Así, el valor de un opción call sobre estas acciones es de 8,11 €.

### 5.2.2. Valoración de una opción put europea

Para valorar la opción de venta europea comenzamos a calcular también de atrás hacia delante. Sin embargo, en este caso los nódulos finales se calculan con la expresión: $p = máx\ (E - S^T,\ 0)$, coincidiendo también con su valor intrínseco.

A parte de esto, los demás nódulos se calculan con la misma fórmula que para las opciones call, ya que no se permite el ejercicio de la opción antes del vencimiento.

P. ej.: nódulo $A = máx\ (100 - 136{,}44,\ 0) = 0$

Nódulo $C = (0{,}50302\ x\ 0 +\ 0{,}49698\ x\ 1{,}75) \cdot\ e^{-0{,}045\ \cdot\ 0{,}0833} = 0{,}62$

El árbol obtenido en el caso de una opción put europea sería el siguiente, donde el número situado encima de cada nódulo es el precio de la acción y el de abajo el de la opción:

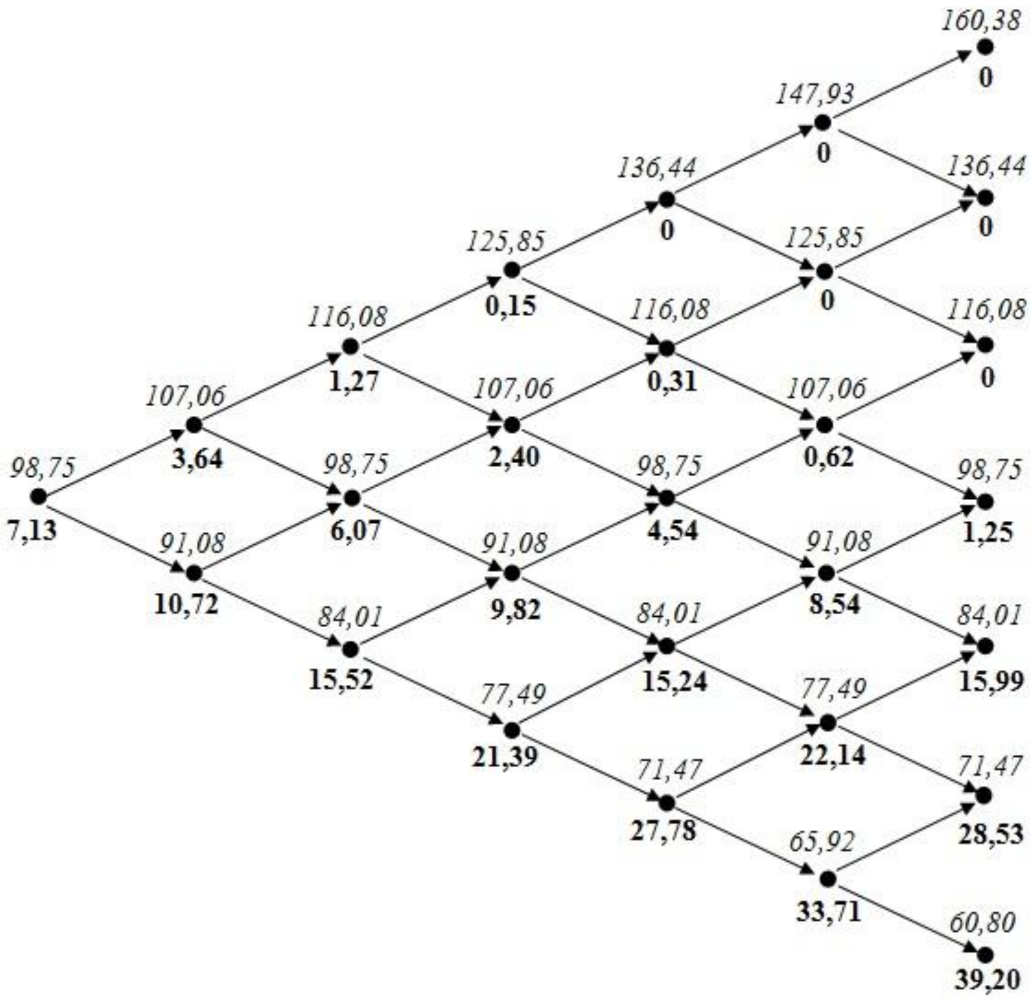


*Figura 5.3.: Árbol binomial para una opción put europea.* Fuente: elaboración propia.

El valor de la opción de compra europea es de 7,13 € en la actualidad.

### 5.2.3. Valoración de una opción put americana

Ya hemos mencionado anteriormente que el valor de una put americana es distinto al de una europea. El hecho de que tengamos la alternativa de ejercer antes de vencimiento y obtener por la acción el precio de ejercicio pactado hace que sea necesario revisar cada nódulo para comprobar si es preferible el ejercicio de la opción antes del vencimiento a mantener la opción por un periodo de tiempo $\Delta t$.

Para el cálculo de los nódulos finales utilizaremos la misma expresión que para la opción put europea. En el caso del resto de nódulos, al tener la posibilidad de ejercer antes de vencimiento, deberemos elegir el mayor valor entre el precio de la opción si no la ejerciéramos (considerarla como europea) y el precio de ejercicio menos el de la acción, obteniendo así la siguiente expresión:

P. ej.: nódulo $D = máx\ (15{,}24\ ;\ 100 - 84{,}01) = máx\ (15{,}24\ ; 15{,}99) = 15{,}99$

Aplicándolo al resto de nódulos, el árbol resultante sería este, donde el valor superior del nódulo es el precio de la acción y el valor inferior el precio de la opción:

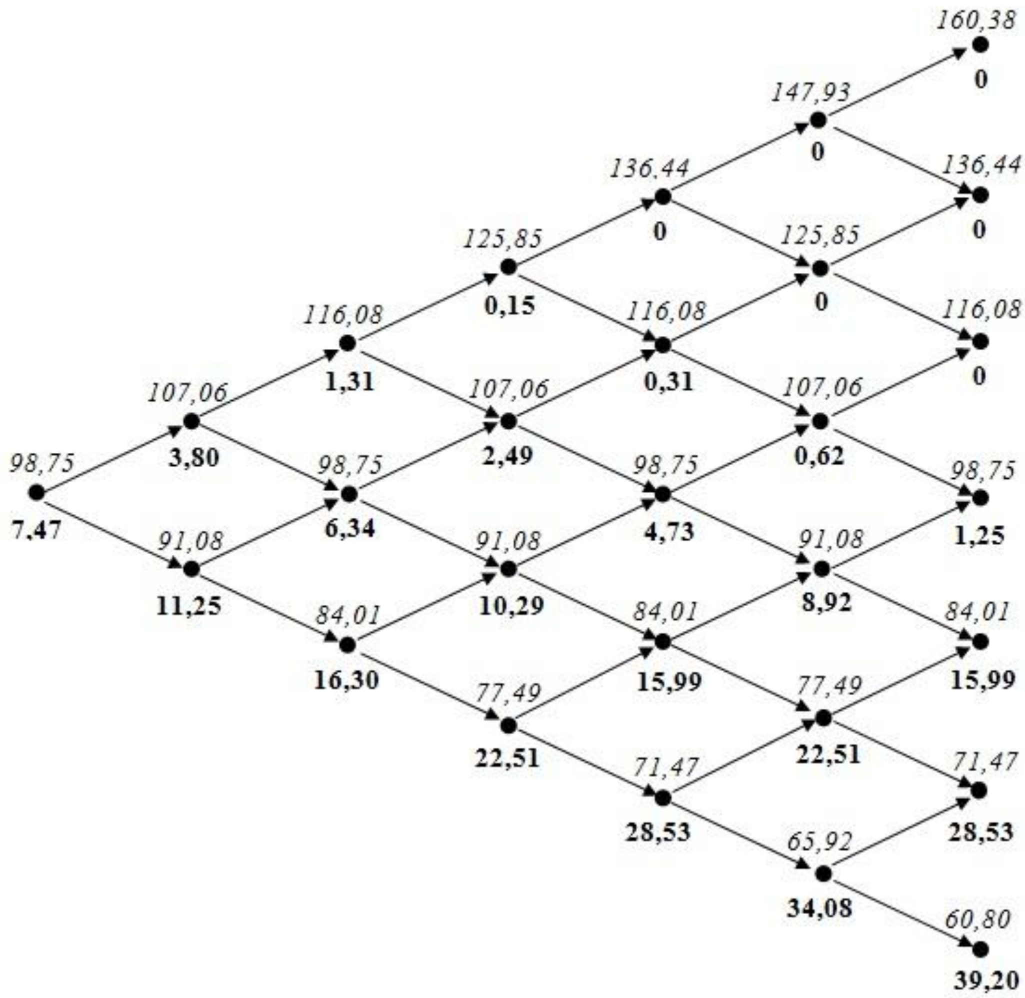


*Figura 5.4.: Árbol binomial para una opción put americana.* Fuente: elaboración propia.

El valor de la opción de venta americana es de 7,47 €, de manera que se cumple la premisa que hemos estado manejando de que la put americana tiene mayor valor que la put europea.

Así pues, con un mismo ejemplo hemos visto el procedimiento de valoración de las opciones sobre acciones que no reparten dividendos y las diferencias de precios que se establecen entre unos tipos de opciones y otros.

## 5.3. OPCIONES SOBRE ACCIONES QUE REPARTEN DIVIDENDOS: DIVIDENDOS DISCRETOS

### 5.3.1. Planteamiento del problema

En los mercados de valores, el hecho de conocer si una acción va a repartir dividendos en el plazo de un año en un momento dado no supone demasiados inconvenientes. De hecho, es posible conocer incluso cual será aproximadamente el valor de dichos dividendos. Este valor, en el momento de ser repartidos los dividendos, hacen que disminuya el precio de la acción, es decir, deducen de su precio los dividendos pagados a los accionistas.

Si consideramos el dividendo repartido como un porcentaje fijo del valor de la acción en el momento de reparto del dividendo, el valor de la opción puede ser calculado a través del modelo de Merton (1973), el de Black y Scholes (1973) o el que describen Cox, Ross y Rubinstein para este tipo de situaciones.

No obstante, en el mercado se suele considerar al dividendo como una cantidad fija de dinero que se reparte en un momento de tiempo determinado. Esto hace que estos modelos se queden obsoletos al tratar de hallar el valor de la opción en estas condiciones.

Ante esto, existen algunas aproximaciones propuestas que intentan resolver este dilema y poder poner precio a las opciones. En este sentido, nos encontramos con tres modelos básicos:

a) Escrowed Model: utiliza el precio de la opción menos el valor actual de los dividendos pagados hasta la fecha del vencimiento.
b) Forward Model: suma al valor de la acción el valor del dividendo capitalizado en cada periodo desde la fecha de reparto del dividendo hasta llegar al vencimiento.
c) Modelo Log Normal a Trozos: el valor de la acción cae en la cuantía del dividendo en el momento en que éste se reparte.

El Escrowed y el Forward Model muestran cómo la forma de calcular el precio de la opción se puede realizar de forma sencilla ajustando el valor de la acción o del precio de ejercicio, respectivamente. De esta manera se obtiene un árbol recombinante que supone una manera eficiente de calcular los precios de las opciones. No obstante, existen algunos problemas en la realización del modelo como por ejemplo el que el Escrowed Model admite oportunidades de arbitraje, ya que sigue dos caminos para calcular el árbol de forma que sea recombinante, obteniendo distintos precios de las acciones que permiten que se dé esta circunstancia.

Por razones como esta, no es raro pensar que el Modelo Log Normal a Trozos sea el modelo más correcto de estos tres. Sin embargo, debido a su método de cálculo a partir de un árbol no recombinante hace que su cálculo sea muy laborioso y difícil de implementar por ordenador, al contrario que los otros dos, lo que lo hace un tanto ineficiente.

Debido a esto, se han realizado algunas modificaciones tanto en el Escrowed Model como en el Forward Model de manera que se puedan salvar en la medida de lo posible los inconvenientes que conllevan y poder obtener resultados cercanos a los del Modelo Log Normal a Trozos. Algunos ejemplos son el de Bos y Vandermark (2002), que proponen una mezcla entre el Escrowed y el Forward Model, donde parte del dividendo se incorpora al precio modificado de la acción y otra parte al precio modificado de ejercicio; o el de Beneder y Vorst (2002), que utilizan un valor modificado de la volatilidad que incorpora el dividendo y lo utilizan en el Escrowed Model.

Sin embargo, todos estos modelos se acercan al valor proporcionado por el Modelo Log Normal a Trozos si se considera el pago de un solo dividendo.

En los sucesivos apartados estudiaremos algunas de estas formas o variaciones, de modo que podamos ver diferentes caminos para valorar la opción partiendo de los mismos datos.

Así pues, en los siguientes apartados conoceremos la forma inicial propuesta por Cox, Ross y Rubinstein en 1979 basada en un rendimiento en términos de porcentaje; la que propone Hull (1996), basada en el mencionado Escrowed Model; el Forward Model; y la propuesta por Lamothe Fernández (1993), el Modelo Lognormal a Trozos, aparte de concluir con un ejemplo práctico, de manera que podamos utilizar cada una de las formas estudiadas con los mismos datos y comparar los resultados obtenidos.

### 5.3.2. Valoración según Cox, Ross y Rubinstein

Cox, Ross y Rubinstein (1979) proponen un modelo de valoración en el cual consideran que en cada fecha de reparto de dividendos hasta el final de la opción la acción proporciona un rendimiento constante $\delta$, el cual es conocido.

Por un lado, en los nódulos previos al reparto del dividendo, el valor que toma la acción será $Su^j d^{i-j}$, calculando $u$ y $d$ como hemos visto anteriormente. Por otro lado, si el posible precio de la acción calculado es posterior en el tiempo a la fecha de reparto del dividendo, éstos serán calculados con la expresión $S(1 - \delta)u^j d^{i-j}$. Además de esto, si se diera el caso de que la acción reparte más de un dividendo durante el periodo considerado, estos se irían añadiendo al cálculo después de que pase la fecha de cada reparto, quedando la expresión de esta manera: $S(1 - \delta_i)u^j d^{i-j}$.

Recordando lo expuesto en apartados anteriores, vimos la demostración de que las call europeas y americanas sobre acciones que no reparten dividendos tenían el mismo valor, ya que el ejercicio anticipado no era favorable por diversos motivos. En el caso de las acciones que reparten dividendos, el hecho de que éstos hagan disminuir el precio de la acción se refleja en los precios de las opciones, provocando que no valgan lo mismo puesto que en estas circunstancias sí puede interesar el ejercicio anticipado.

Llegados a este punto, veamos ahora por separado el cálculo de opciones call y de opciones put para explicarlas de una manera más clara y no mezclar conceptos.

#### *5.3.2.1. Valoración de una opción call americana*

En la fecha de vencimiento, la opción se valora por su valor intrínseco, siendo

$$C = máx\ [0, S(1 - \delta) - E]$$

A partir de aquí, calculando hacia atrás en el árbol llegaríamos al valor del nódulo anterior con la expresión

$C = [pC_u + (1 - p)C_d]/\hat{r} > S - E$, si no, $C = S - E$.

De momento, el cálculo es similar al de acciones sin dividendos salvo por la incorporación del rendimiento $\delta$ en el cálculo del valor de la acción. No obstante, existen momentos en los que la opción se valora por su valor intrínseco y puede ser favorable ejercerla antes del vencimiento. De hecho, de esto se deriva la existencia de un valor $\hat{S}$, tal que si $S > \hat{S}$ la opción deber ser ejercida inmediatamente. $\hat{S}$ será el precio de la acción para el cual se cumple la condición $[pC_u + (1 - p)C_d]/\hat{r} = S - E$. Así, a partir de este valor, cualquier valor de $S$ mayor provocará que el valor intrínseco sea mayor que el valor teórico y la opción se ejerza antes del vencimiento.

Dicho ya todo esto, el saber si el ejercicio antes de vencimiento será favorable no debería causar problemas conceptuales, puesto que no resulta difícil de comprender.

Sin embargo, puede parecer que su planteamiento no permita la existencia de una única fórmula para calcular el precio de la opción. Por el contrario, si calculamos los precios de la opción desde el vencimiento hacia atrás podemos obtener con una fórmula por periodo el valor actual de la opción sin necesidad de hacer todo el árbol.

Siendo *C* el valor actual de una call de *n* periodos de duración, consideremos

$$\bar{v}(n,i)=\sum_{k=1}^{n-i} v_k$$

Donde $\bar{v}(n,i)$ es el número de fechas de reparto de dividendos que ocurren durante los próximos *n – i* periodos.

Consideramos *C (n, i, j)* como el valor de la call dentro de *n – i* períodos, donde el valor de la acción ha pasado de $S$ a $u^j d^{n-i-j}(1-\delta)^{\bar{v}\,(n,i)}S$. Con estos datos, empezamos a calcular el valor de la opción, empezando por la fecha de vencimiento, con las siguientes fórmulas:

En el vencimiento, *i=0*:

$$C(n,0,j)=máx\left[0,u^j d^{n-j}(1-\delta)^{\bar{v}\,(n,0)}S-E\right]$$

Un periodo antes del vencimiento, *i=1* y al inicio *i=n*. Entonces, de forma general:

$$C(n,i,j)=máx\left[u^j d^{n-i-j}(1-\delta)^{\bar{v}\,(n,i)}S-E,[pC(n,i-1,j+1)+(1-p)C(n,i-1,j)]/\hat{r}\right]$$

No obstante, el cálculo del árbol completo nos permite ver con más claridad la posible evolución de los precios y de qué manera le afecta el dividendo.

*5.3.2.2. Valoración de una opción put americana*

El procedimiento que proponen Cox, Ross y Rubinstein para la valoración de opciones put es el mismo que emplean con las call. Teniendo que en el vencimiento

$$P=máx\ (0,E-(1-\delta)S$$

podemos ir calculando cada nódulo hacia atrás como se hizo en el caso de la call, teniendo en cuenta el rendimiento que proporcionan los dividendos y la posibilidad de ejercer antes del vencimiento si el valor intrínseco de la opción supera al valor teórico. La opción se ejercerá antes de vencimiento si se da el caso en que $S<\hat{S}$, siendo $\hat{S}$ el valor de la acción que haga que se cumpla la condición $\frac{[pP_u+(1-p)P_d]}{\hat{r}}=E-S$.

La opción put se podrá valorar con las fórmulas empleadas para la opción call pero intercambiando el precio de la acción y el de ejercicio para hallar el valor intrínseco correcto para la put.

### 5.3.3. Valoración según Hull: Backward Model

Este método que plantea Hull (1996) es definido por otros autores, como por ejemplo Vellekoop y Nieuwenhuis (2006), como el ‘Escrowed model’. No obstante, debido a su razonamiento y a la existencia de otro modelo reconocido como 'Forward Model' (el cual explicaremos a continuación de éste), vamos a considerar a este modelo como 'Backward Model'.

Hull tiene también en cuenta este planteamiento basado en el rendimiento propuesto por Cox, Ross y Rubinstein para las opciones sobre acciones que reparten dividendos.

No obstante, considera como un supuesto más realista el hecho de que se conozca de antemano la cantidad exacta de dividendo que va a repartir una determinada acción en un periodo de un año y no únicamente un rendimiento basado en un porcentaje sobre el precio de la acción, siendo esto lo que se utiliza usualmente en la realidad.

Hull, además, asume también que haciendo esto nos encontraremos con un árbol binomial no recombinante igual al que plantea Lamothe. Sin embargo, Hull, para no hacerlo tan complicado con demasiados cálculos y un modo específico para cada tipo de opción, establece una solución en la que incluye los dividendos de modo que el árbol salga recombinante y su cálculo sea mucho más sencillo y válido igualmente tanto para calls y puts americanas o europeas.

Para ello, asume que el precio de las acciones tiene dos componentes: una parte que es incierta y otra que es el valor actual de todos los dividendos futuros durante la vida de la opción.

Si suponemos que hay una fecha de reparto de dividendos (τ) durante la vida de la opción y que esta se encuentra justo entre dos periodos del árbol, el valor del componente incierto $S$* viene dado, en el momento *x*, por:

$$S^*(x) = S(x)\ cuando\ x > \tau$$
$$S^*(x) = S(x) - De^{-r\,(\tau - x)}\ cuando\ x\ \leq \tau$$

Definimos σ* como la volatilidad de $S$* y consideramos que σ*, y no σ, es constante. Con este valor calculamos las variables $p$, $u$ y $d$ con las fórmulas señaladas en capítulos anteriores y construimos el árbol binomial a partir de $S$*. En este árbol construido, el precio de la acción en cada nódulo será igual al valor de $S$* en cada momento más el valor actualizado del dividendo cuando se trate de nódulos previos al reparto del dividendo, y el valor $S$* correspondiente a la acción después de dicho reparto, o lo que es lo mismo:

$S^*(t)u^j d^{i-j} + De^{-r\,(\tau - i\,\Delta t)}$ cuando $i\Delta t < \tau$ , es decir, antes de repartir el dividendo

$S^*(t)u^j d^{i-j}$ cuando $i\Delta t > \tau$, es decir, después del dividendo.

Este planteamiento implica un supuesto perfectamente razonable acerca de la volatilidad del precio de las acciones y, además, permite la construcción de un árbol binomial recombinante que ayuda a simplificar el cálculo del valor de la opción. Esta situación también puede generalizarse para situaciones en las la acción reparta más de un dividendo.

### 5.3.4. Forward Model

El Modelo Forward es analizado por Frishling (2002) en un artículo en el cual referencia también a Musiela y Rutkowski (1997).

En este modelo, al contrario que en el Backward Model, en el cual se restaba el valor actual de los dividendos a la acción en los periodos previos al reparto del dividendo y luego se sumaban, se resta al precio de la acción ($S_t$) la cuantía del dividendo capitalizada en cada periodo que consideremos, de manera que los valores hipotéticos de las acciones que van a variar son los que se encuentren después de la fecha de reparto del dividendo.

Desde un punto de vista matemático se puede plantear así:

Dada una fecha $t_i$ en la que la acción reparte dividendos y $t$ otra fecha cualquiera,

$A_t = S_t - \sum_{0<t_i<t} D_{t_i} e^{r\,(t-t_i)}$ cuando $t > t_i$

$A_t = S_t$ cuando $t < t_i$.

A partir de este árbol binomial, el cual es recombinante, se utiliza la forma habitual de resolución de árboles binomiales para llegar al valor del precio de la opción.

Existe también otra manera de calcular el valor de la opción, la cual se deriva de las fórmulas que acabamos de plantear, y que ofrece exactamente la misma solución que el razonamiento anterior. Este método considera para un momento $t > t_i$ el valor intrínseco de la opción, a través del cual, empleando las ecuaciones anteriores, llega a la siguiente conclusión:

$$(A_t - E) = \left(S_t - \sum D_{t_i} e^{r\,(t-t_i)} - E\right) = \left(S_t - \left(E + \sum D_{t_i} e^{r\,(t-t_i)}\right)\right)$$

De modo que, cuando vayamos a valorar la opción, el valor intrínseco será calculado así:

$S_t - E$ cuando $t < t_i$

$S_t - E' = S_t - \left(E + \sum D_{t_i} e^{r\,(t-t_i)}\right)$ cuando $t_i < t$

Así pues, el Forward Model proporciona también un método sencillo para hallar el valor de una opción pero únicamente sirve para eso, ya que plantea inconvenientes como el hecho de modificar los precios de las acciones restándoles el dividendo después de haber sido repartido y capitalizándolo hacia delante en el tiempo, en el caso de la primera variante; o también el hecho de sumar ese mismo dividendo capitalizado al precio de ejercicio, el cual se debería suponer fijo en todo momento ya que está establecido en el contrato de la opción, refiriéndonos a la segunda variante del modelo.

### 5.3.5. Valoración según Lamothe Fernández

La valoración que plantea Lamothe Fernández (1993) es un tanto más compleja que las dos anteriores hablando en términos de simplicidad en su cálculo.

En este modelo, conocido también como el Modelo Lognormal a Trozos, Lamothe distingue entre opciones europeas y opciones americanas. Además, dentro de estas últimas especifica una serie de condiciones en las opciones call y en las opciones put que ayudan a entrever de antemano, y sin necesidad de calcular los valores de la opción en cada momento, si el ejercicio antes de vencimiento será favorable o no e, incluso, si será beneficioso hacerlo antes del reparto de dividendos.

Conociendo esta información, vamos a presentar los casos de valoración para opciones europeas y americanas en apartados diferentes.

#### *5.3.5.1. Valoración de opciones europeas*

El caso de opciones europeas sobre acciones que reparten dividendos es bastante sencillo de calcular, puesto que no es necesario tener en cuenta la posibilidad de ejercer la opción antes del vencimiento. El cálculo se realiza en dos fases:

1. Se reduce el precio actual de la acción con el valor actualizado de todos los dividendos esperados a lo largo de la vida de la opción.
$$S' = S - \sum_{J=1}^{m} D_J \cdot e^{-r \cdot tj}$$
Donde: $D_J$ = dividendo que paga la acción en *tj* fracciones de año desde la fecha de cálculo. Sólo se considerarán los *m* dividendos que se paguen antes del vencimiento de la opción.

2. Se valora la opción por el método binomial utilizando la misma mecánica pero utilizando *S'* en vez de *S*.

Al no existir posibilidad de ejercicio antes del vencimiento, simplemente actualiza el valor de los dividendos y los resta del valor de la acción. Esto permite un cálculo sencillo y que el árbol binomial salga recombinante.

#### *5.3.5.2. Valoración de opciones americanas*

En el caso de las opciones americanas, Lamothe plantea el cálculo de los posibles valores de la acción utilizando las variables *u* y *d* con normalidad hasta llegar a la fecha de reparto del dividendo, en la cual el valor de la acción disminuye en la cuantía del dividendo a repartir.

A partir de dicho momento, el cálculo del valor de la acción en el árbol va a ser distinto si seguimos un camino u otro, con lo cual el árbol binomial resultante va a ser no recombinante y, en consecuencia, con más valores a calcular en cada periodo debido a las diferentes trayectorias que puede tomar el precio de la acción, ya que dicha disminución no es proporcional a cada precio de la acción sino que es una cantidad fija.

En cuanto a la citada disminución del precio de la acción con el reparto del dividendo, esto hará que el día anterior a la fecha del dividendo la opción también tenga un valor diferente al día en que éste se reparte, lo cual no sólo afectará a la opción de venta, sino también a la de compra, cuyo valor será diferente al de la opción europea.

Para saber en qué periodo del árbol debemos hacer constar la disminución que provoca el reparto del dividendo utilizaremos el siguiente número entero más próximo al cociente $\frac{n \cdot t}{T}$, donde *n*= nº de periodos del árbol, *t* = nº de días desde el inicio del cálculo hasta que se paga el dividendo y *T* = plazo de vencimiento de la opción en días.

Con todo esto, podemos pasar a ver por separado las distintas condiciones que establece tanto para la opción put como para la call.

<u>Opción put:</u>

Para Lamothe, la forma de calcular el valor de una put americana sobre una acción que reparte dividendos es la misma que para cuando la acción no reparte dividendos, es decir, se debe verificar que en cada nódulo del árbol se toma el valor máximo entre el valor intrínseco de la opción en dicho momento y el valor teórico de la opción.

Además de esto, asume que en este tipo de opciones existe una condición necesaria y suficiente que nos permite saber si el ejercicio antes del vencimiento es favorable también antes de la fecha de reparto del dividendo. Así, si se cumple la siguiente condición, la opción put americana debería ejercerse inmediatamente, incluso antes del reparto del dividendo. Si no se cumple, el ejercicio será posible desde que se reparte el dividendo hasta que vence la opción.

$$D < \frac{r \cdot E \cdot (1+r)^t}{(1+r)^T}$$

<u>Opción call:</u>

En las opciones sobre acciones que no repartían dividendos, el precio de la call europea y americana era el mismo, ya que el hecho de ejercer la opción antes de vencimiento no representaba ninguna ventaja frente al hecho de mantenerla hasta el final.

No obstante, Lamothe asume que cuando las acciones reparten dividendos no ocurre lo mismo, ya que el día anterior al reparto del dividendo la acción (y por tanto la opción) vale más que al día siguiente, cuando la acción vale menos. Ante esto, el poseedor de la opción debe analizar cuidadosamente el beneficio que supone el ejercicio anticipado cuando se acerca la fecha de reparto del dividendo de la acción.

Para este tipo de situaciones, se basa en estudios realizados por Roll (1977), en los cuales ha demostrado que existe una condición necesaria, aunque no suficiente, que debe cumplirse para verificar si es beneficioso el ejercicio anticipado de la opción, o si, por el contrario, es más favorable esperar. Dicha condición necesaria y no suficiente es que

$$D > \frac{r' \cdot E}{1+r}$$

Donde *r'* es el tipo de interés vigente para el periodo transcurrido entre el pago del dividendo y el vencimiento de la opción.

A parte de esto, en este tipo de opciones tendremos que verificar que en cada nódulo se cumple la condición de que el precio de la opción, calculándolo como hemos visto hasta ahora, es mayor que el valor intrínseco de la opción en ese mismo momento, puesto que si no es así se produciría ejercicio anticipado y el valor de la opción sería su valor intrínseco.

En un primer momento, si no se cumpliera la condición necesaria no suficiente sería mejor aguantar la opción hasta el vencimiento. Sin embargo, Lamothe afirma que en la práctica no es esto lo que siempre ocurre, puesto que es algo normal que los operadores con este tipo de opciones las ejerzan de manera anticipada cuando el valor intrínseco de la opción supera al valor teórico en el momento del cálculo. Esta situación puede darse incluso hasta justo el día anterior a la distribución del dividendo, por lo que debe analizarse minuciosamente dicha situación cuando se acerca el reparto del dividendo.

Un ejemplo muy sencillo de árbol no recombinante (que aún así se complica bastante tomando pocos periodos) sería el siguiente para: $S$ = 69,11; $E$ = 70; $T$ = 5 meses; $r$ = 7%; $\sigma$ = 34%; $D$ = 2,95; $\tau$ = 74 días.

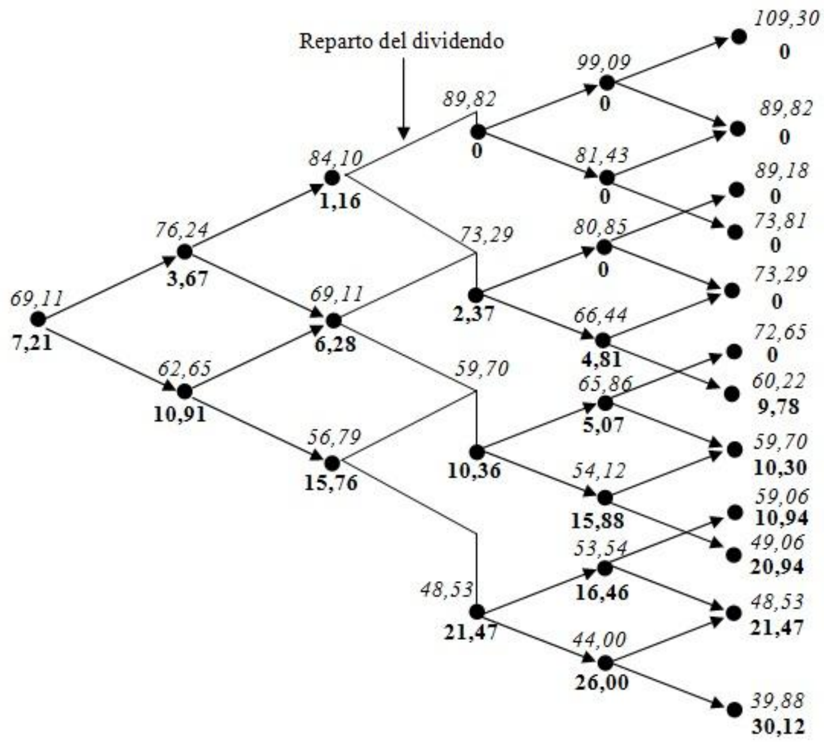


*Figura 5.5.: Árbol binomial no recombinante.* Fuente: elaboración propia.

### 5.3.6. Aplicación de los modelos e interpretación de resultados

En este apartado vamos a establecer un ejemplo con determinados datos de las variables, de manera que vamos a poder ver los resultados que se obtienen al utilizar el modelo basado en un rendimiento constante, el Backward Model y el Forward Model y sus diferencias con el Modelo Lognormal a Trozos, del cual hemos dicho que, aunque es el más complejo y costoso de calcular, es el que proporciona un valor más real para las opciones.

Para la obtención de los siguientes resultados se ha procedido a implementar estos cuatro modelos mediante fórmulas en el software informático 'Matlab', el cual ha permitido obtener los resultados de forma eficaz, rápida y precisa, permitiendo la utilización de un número suficiente de periodos para una correcta comparación de los resultados. Una vez obtenidos los resultados, se han manipulado en el Excel y se han calculado las variaciones para una mejor y más rápida comprensión e interpretación.

Los datos que a continuación se presentan han sido obtenidos utilizando los siguientes valores para los factores que afectan al precio de la opción:

- $r$ = 5%
- $S$ = 1000
- $T$ = 1 año
- $\sigma$ = 0,3
- $N$ = 500 periodos
- $\tau$ = 0,25, 0,5, y 0,75 años (momento de reparto del dividendo).

En cuanto a los modelos utilizados se refiere, la leyenda sería la siguiente:

- MOD 0: sistema basado en el rendimiento de Cox, Ross y Rubinstein.
- MOD 1: Backward Model.
- MOD 2: Forward Model.
- MOD 3: Modelo Log normal a Trozos.

Antes que nada, debemos hacer constar que el método desarrollado para hallar los valores de las siguientes tablas se puede considerar como un método fiable, puesto que en todos los casos se cumple lo explicado anteriormente de que las opciones americanas sobre acciones que reparten dividendos, por el hecho de proporcionar el derecho de ejercerse antes del vencimiento si se considera favorable, tienen un valor superior a las europeas. Esta fiabilidad se consigue en gran parte al haber utilizado un valor alto del número de periodos de los árboles binomiales, $N = 500$.

En segundo lugar, se cumple también que, como el reparto del dividendo provoca una disminución en el precio de la acción, a mayor dividendo menor precio de la call porque hace que sea menos probable que el precio de la acción supere el precio de ejercicio, y a mayor dividendo mayor precio de la put, puesto que el descenso de la acción hará que sea más probable que el precio de ésta sea menor que el de ejercicio.

Además, para mayor comprobación, se realizó una tabla en la que no se consideró reparto alguno de dividendo, la cual no se ha incluido por su escasa relevancia, en la que los resultados obtenidos otorgaban exactamente el mismo valor a las call americanas que a las europeas en ausencia de dividendos, cumpliendo lo expuesto en apartados iniciales de este capítulo y confirmando así la fiabilidad de estos datos.

| | | CALL AMERICANA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | | PUT AMERICANA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **E** | **D** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** | **MOD 3** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** | **MOD 3** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** |
| **1000** | **100** | 107,8 | 100,4 | 111,1 | 107,5 | 0,3 | -7,1 | 3,6 | 145,4 | 144,1 | 155,2 | 150,5 | -5,1 | -6,4 | 4,7 |
| **1000** | **50** | 118,3 | 115,7 | 121,4 | 118,8 | -0,5 | -3,1 | 2,6 | 119,9 | 119,3 | 125,1 | 122,5 | -2,6 | -3,2 | 2,5 |
| **500** | **100** | 512,3 | 512,3 | 512,4 | 512,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,2 | 1,2 | 2,8 | 1,8 | -0,6 | -0,6 | 1,0 |
| **500** | **50** | 512,4 | 512,4 | 512,4 | 512,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,7 | 0,7 | 1,2 | 0,9 | -0,2 | -0,2 | 0,3 |
| **1500** | **100** | 9,6 | 9,3 | 13,4 | 11,6 | -1,9 | -2,3 | 1,8 | 567,0 | 564,5 | 567,1 | 566,3 | 0,7 | -1,8 | 0,8 |
| **1500** | **50** | 14,0 | 14,1 | 16,6 | 15,5 | -1,4 | -1,4 | 1,1 | 519,9 | 518,7 | 520,4 | 519,9 | 0,0 | -1,2 | 0,5 |
| | | | | | **Promedios Abs.:** | 0,7 | 2,3 | 1,5 | | | | **Promedios Abs.:** | 1,5 | 2,3 | 1,6 |

| | | CALL EUROPEA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | | PUT EUROPEA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **E** | **D** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** | **MOD 3** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** | **MOD 3** | **MOD 0** | **MOD 1** | **MOD 2** |
| **1000** | **100** | 86,6 | 87,8 | 99,3 | 93,8 | -7,2 | -6,0 | 5,6 | 137,8 | 136,6 | 148,1 | 142,5 | -4,7 | -6,0 | 5,6 |
| **1000** | **50** | 112,7 | 113,4 | 119,2 | 116,4 | -3,7 | -3,0 | 2,9 | 113,9 | 113,4 | 119,2 | 116,4 | -2,4 | -3,0 | 2,9 |
| **500** | **100** | 425,5 | 428,0 | 429,6 | 428,6 | -3,1 | -0,6 | 1,0 | 1,2 | 1,1 | 2,8 | 1,8 | -0,6 | -0,6 | 1,0 |
| **500** | **50** | 475,1 | 476,3 | 476,8 | 476,5 | -1,4 | -0,2 | 0,3 | 0,7 | 0,7 | 1,2 | 0,9 | -0,2 | -0,2 | 0,3 |
| **1500** | **100** | 9,1 | 9,3 | 13,3 | 11,5 | -2,4 | -2,2 | 1,9 | 535,9 | 533,6 | 537,7 | 535,8 | 0,1 | -2,2 | 1,9 |
| **1500** | **50** | 13,9 | 14,1 | 16,6 | 15,5 | -1,5 | -1,4 | 1,1 | 490,8 | 489,7 | 492,2 | 491,1 | -0,3 | -1,4 | 1,1 |
| | | | | | **Promedios Abs.:** | 3,2 | 2,2 | 2,1 | | | | **Promedios Abs.:** | 1,4 | 2,2 | 2,1 |

*Tabla 5.1.: Valoración de opciones y variaciones para $\tau = 0,5$.* Fuente: elaboración propia.

En la tabla 5.1. podemos observar cada uno de los valores que pueden tomar las opciones call y put, tanto americanas como europeas, dependiendo del precio de ejercicio y los dividendos que consideremos. En ella se ha considerado que la acción reparte un dividendo a los 6 meses de vida de la opción.

En primer lugar, la característica que más llama la atención es que los precios de las opciones obtenidos sean tan distintos. Este hecho no hace más que confirmar lo que ya decíamos acerca de las diferencias que existen entre los modelos, en la medida en que se trata básicamente de modelos simplificados que intentan aproximar un valor para la opción de una forma sencilla y lo más eficaz posible.

Tanto en esta como en las tablas 5.2. y 5.3. podemos observar, por un lado, como el Modelo 1 (Backward Model) presenta valores negativos con respecto al Modelo 3, es decir, infravalora siempre el valor de la opción. Esto se debe a que, en su cálculo, primero se resta el dividendo actualizado al precio de las acciones en los periodos antes del vencimiento para empezar a construir el árbol binomial y, posteriormente, este dividendo actualizado se suma a los valores de las acciones en los periodos antes del vencimiento. Este procedimiento provoca que las acciones en los periodos posteriores al reparto del dividendo están infravaloradas, lo cual, como vemos, tiene un efecto claro a la hora de valorar la opción.

Por otro lado, el Modelo 2 (Forward Model) lo que hace es calcular el árbol con los valores iniciales y restar a las acciones en los periodos posteriores al reparto del dividendo el valor de éste capitalizado en cada periodo. Con esto se consigue una simplificación que produce un árbol recombinante en el cual los precios de las acciones son superiores a los del Modelo 1, provocando que al calcular el precio de la opción, ésta esté sobrevalorada, lo que explica el hecho de que las variaciones del Modelo 2 con respecto al Modelo 3 sean siempre positivas.

En el caso del Modelo 0 (basado en un rendimiento constante), los precios obtenidos son tanto positivos como negativos, ya que se basa en una proporción y no en un dividendo fijo repartido.

En esta tabla 5.1., en la cual el dividendo se reparte a la mitad de la vida de la opción (6 meses), en todos los casos el Modelo 2 proporciona una mejor valoración que el Modelo 1, por lo que deducimos que en estos casos el Modelo 2 es mejor. No obstante, sorprendentemente, a excepción de la call europea, el Modelo 0 es el que más se aproxima a los resultados del Modelo 3, siempre considerando el promedio absoluto de las variaciones obtenidas, ya que hay situaciones, como por ejemplo la de la call americana ‘out of the money’, en las que el Modelo 2 es más preciso.

Pasemos ahora a comentar la tabla 5.2.:

En primer lugar, se observa que el Modelo 2 es, en términos absolutos, el más preciso a la hora de valorar los precios de las opciones. Esto se debe a que el Forward Model capitaliza el dividendo repartido y se lo resta en cada periodo a los precios de las acciones posteriores al reparto del dividendo. Al repartirlo a los nueve meses y quedar únicamente tres meses para la fecha del vencimiento, la distorsión que pueda provocar este modelo en los posibles precios de las acciones es menor que si el tiempo transcurrido después del reparto del dividendo fuese mayor, obteniéndose pues unos mejores resultados.

En segundo lugar, y en este mismo sentido, puesto que podríamos decir que el Forward Model es “contrario” al Backward Model, los resultados obtenidos por este modelo en la tabla 4.2. son los que más varían respecto al Modelo 3 en prácticamente todas las posibilidades consideradas.

| | | CALL AMERICANA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | | PUT AMERICANA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | D | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 |
| **1000** | **100** | 123,7 | 114,1 | 124,8 | 123,7 | 0,1 | -9,5 | 1,1 | 142,5 | 140,6 | 151,8 | 149,5 | -6,9 | -8,9 | 2,3 |
| **1000** | **50** | 127,8 | 123,3 | 128,8 | 127,8 | -0,1 | -4,6 | 0,9 | 117,8 | 117,0 | 122,7 | 121,5 | -3,6 | -4,5 | 1,2 |
| **500** | **100** | 518,5 | 518,4 | 518,5 | 518,5 | 0,0 | -0,1 | 0,0 | 1,2 | 1,1 | 2,8 | 2,2 | -1,0 | -1,1 | 0,5 |
| **500** | **50** | 518,6 | 518,5 | 518,6 | 518,6 | 0,0 | -0,1 | 0,0 | 0,7 | 0,7 | 1,2 | 1,0 | -0,3 | -0,3 | 0,2 |
| **1500** | **100** | 12,8 | 10,4 | 14,8 | 14,0 | -1,2 | -3,6 | 0,8 | 551,7 | 548,1 | 551,6 | 551,1 | 0,6 | -3,0 | 0,5 |
| **1500** | **50** | 15,2 | 14,4 | 16,9 | 16,4 | -1,2 | -2,0 | 0,5 | 506,6 | 504,1 | 506,2 | 506,0 | 0,6 | -1,8 | 0,3 |
| | | | | | **Promedios Abs.:** | 0,4 | 3,3 | 0,6 | | | | **Promedios Abs.:** | 2,2 | 3,3 | 0,8 |

| | | CALL EUROPEA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | | PUT EUROPEA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | D | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 |
| **1000** | **100** | 86,6 | 88,4 | 99,8 | 97,1 | -10,5 | -8,7 | 2,7 | 137,8 | 136,0 | 147,3 | 144,6 | -6,8 | -8,7 | 2,7 |
| **1000** | **50** | 112,7 | 113,8 | 119,5 | 118,1 | -5,4 | -4,3 | 1,4 | 113,9 | 113,2 | 118,9 | 117,5 | -3,6 | -4,3 | 1,4 |
| **500** | **100** | 425,5 | 429,2 | 430,8 | 430,2 | -4,7 | -1,1 | 0,5 | 1,2 | 1,1 | 2,7 | 2,2 | -1,0 | -1,1 | 0,5 |
| **500** | **50** | 475,1 | 476,9 | 477,4 | 477,2 | -2,1 | -0,3 | 0,2 | 0,7 | 0,7 | 1,2 | 1,0 | -0,3 | -0,3 | 0,2 |
| **1500** | **100** | 9,1 | 9,4 | 13,4 | 12,5 | -3,4 | -3,1 | 0,9 | 535,9 | 532,5 | 536,6 | 535,7 | 0,2 | -3,1 | 0,9 |
| **1500** | **50** | 13,9 | 14,2 | 16,6 | 16,1 | -2,1 | -1,9 | 0,5 | 490,8 | 489,2 | 491,6 | 491,1 | -0,3 | -1,9 | 0,5 |
| | | | | | **Promedios Abs.:** | 4,7 | 3,2 | 1,0 | | | | **Promedios Abs.:** | 2,0 | 3,2 | 1,0 |

*Tabla 5.2.: Valoración de opciones y variaciones para $\tau = 0{,}75$.* Fuente: elaboración propia.

En cuanto al Modelo 0, podemos decir que llega a ser incluso más exacto que el Modelo 2 para los casos de la opción americana ‘at the money’y para la put europea ‘in the money’. Sin embargo, aunque no es una conclusión que se preste a generalizaciones, permite ver que, aunque sea un método menos realista, proporciona aproximaciones muy buenas en determinados casos, con lo cual sería un método a tener en cuenta.

Finalmente, la gráfica 5.3., donde la acción reparte dividendos a los tres meses.

| | | CALL AMERICANA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | | PUT AMERICANA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | D | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 |
| **1000** | **100** | 93,6 | 90,0 | 101,2 | 93,8 | -0,2 | -3,8 | 7,4 | 146,8 | 146,2 | 157,2 | 149,7 | -2,9 | -3,6 | 7,5 |
| **1000** | **50** | 113,3 | 113,1 | 119,0 | 114,6 | -1,3 | -1,5 | 4,4 | 120,8 | 120,5 | 126,2 | 122,2 | -1,4 | -1,7 | 4,0 |
| **500** | **100** | 506,2 | 506,2 | 506,2 | 506,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,2 | 1,2 | 2,9 | 1,5 | -0,3 | -0,3 | 1,4 |
| **500** | **50** | 506,2 | 506,2 | 506,2 | 506,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,7 | 0,7 | 1,2 | 0,8 | -0,1 | -0,1 | 0,4 |
| **1500** | **100** | 9,1 | 9,2 | 13,2 | 10,3 | -1,3 | -1,2 | 2,9 | 582,6 | 581,2 | 582,6 | 582,0 | 0,6 | -0,7 | 0,6 |
| **1500** | **50** | 13,9 | 14,0 | 16,5 | 14,7 | -0,8 | -0,7 | 1,8 | 534,1 | 533,4 | 534,4 | 534,0 | 0,1 | -0,6 | 0,4 |
| | | | | | **Promedios Abs.:** | 0,6 | 1,2 | 2,7 | | | | **Promedios Abs.:** | 0,9 | 1,2 | 2,4 |

| | | CALL EUROPEA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | | PUT EUROPEA | | | | Variac. respecto MOD 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | D | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 | MOD 3 | MOD 0 | MOD 1 | MOD 2 |
| **1000** | **100** | 86,6 | 87,2 | 98,9 | 90,3 | -3,7 | -3,1 | 8,6 | 137,8 | 137,2 | 148,8 | 140,3 | -2,5 | -3,1 | 8,6 |
| **1000** | **50** | 112,7 | 113,1 | 119,0 | 114,6 | -1,9 | -1,5 | 4,4 | 113,9 | 113,7 | 119,6 | 115,2 | -1,3 | -1,5 | 4,4 |
| **500** | **100** | 425,5 | 426,8 | 428,5 | 427,1 | -1,5 | -0,3 | 1,4 | 1,2 | 1,1 | 2,8 | 1,4 | -0,3 | -0,3 | 1,4 |
| **500** | **50** | 475,1 | 475,7 | 476,2 | 475,8 | -0,7 | -0,1 | 0,4 | 0,7 | 0,7 | 1,2 | 0,8 | -0,1 | -0,1 | 0,4 |
| **1500** | **100** | 9,1 | 9,2 | 13,2 | 10,3 | -1,3 | -1,2 | 2,9 | 535,9 | 534,8 | 538,8 | 535,9 | 0,0 | -1,2 | 2,9 |
| **1500** | **50** | 13,9 | 14,0 | 16,5 | 14,7 | -0,8 | -0,7 | 1,8 | 490,8 | 490,2 | 492,7 | 491,0 | -0,2 | -0,7 | 1,8 |
| | | | | | **Promedios Abs.:** | 1,6 | 1,1 | 3,2 | | | | **Promedios Abs.:** | 0,7 | 1,1 | 3,2 |

*Tabla 5.3.: Valoración de opciones y variaciones para $\tau = 0{,}25$.* Fuente: elaboración propia.

Al contrario que sucedía en la tabla 5.2., en la que el dividendo se repartía más cerca del vencimiento, en esta tabla se reparte al inicio de vida de la opción. Esto va a provocar, de manera análoga a lo explicado en la tabla 5.2., que el Backward Model sea ahora el que proporcione unos mejores resultados que el Forward Model en casi todos los casos considerados (excepto el de la put americana 'in the money'), ya que, debido a su mecánica de cálculo, produce menos distorsiones en el precio de la acción.

Sin embargo, esto no quiere decir que sea el mejor método a utilizar, puesto que en todos los casos tanto de la put americana como de la europea e incluso en algunos casos de la call americana el Modelo 0 ofrece mejores resultados que los que proporciona el Modelo 1 y, evidentemente, el Modelo 2.

Resulta curioso observar el hecho de que, en las tres tablas, el valor que proporcionan los cuatro modelos para el caso de la call americana que se encuentra muy 'in the money' es exactamente el mismo, lo cual lleva a pensar que en este caso en concreto cualquier método utilizado es lo suficientemente fiable. Esto resulta más curioso aún si cabe porque en el caso de la put americana que se encuentra muy 'in the money' no ocurre esto, sino que se producen variaciones entre los modelos como en cualquier otro caso que consideremos.

Hemos de mencionar también la circunstancia de que, en los casos considerados de las opciones europeas, las variaciones de los Modelos 1 y 2 son iguales para cada uno de los modelos en las call que en las put. Esto se debe, como bien apunta Frishling (2002), a la relación de paridad put-call que se da en el valor de las opciones europeas. Esta relación básicamente explica que, a partir del valor de una opción call, podemos hallar el valor de una opción put equivalente (es decir, con el mismo valor para cada uno de los factores) y viceversa.

# 6. CONCLUSIONES

En líneas generales, podríamos extraer las siguientes conclusiones del trabajo presentado, haciendo hincapié en este último capítulo y en los resultados obtenidos:

El MEFF es un mercado cuanto menos interesante, tanto por los productos que en él se ofrecen como por las garantías que brinda tanto a los inversores como a los intermediarios y miembros que interactúan con él.

Las opciones financieras son un instrumento financiero derivado el cual puede ser muy interesante a la hora de tenerlo en una cartera de negocios, dada su versatilidad (de compra y de venta, sobre distintos activos subyacentes que cotizan en el mercado, con distintos vencimientos…), las posibilidades que ofrecen (sirviendo para diversos fines si utilizamos unas u otras estrategias básicas como las comentadas) y el efecto apalancamiento que producen con respecto a la inversión inicial. No obstante, hay que andar con pies de plomo a la hora de utilizarlos ya que un uso incorrecto o la falta de mayores conocimientos acerca de dicho activo puede provocar que se pierda también mucho dinero.

Existen múltiples modelos de valoración de opciones, los cuales emplean diferentes procedimientos para llegar al valor de la opción y tienen tanto ventajas como limitaciones. Los dos modelos más utilizados hoy en día son el modelo Black-Scholes y el modelo binomial.

El modelo de Black y Scholes permite calcular el precio de una opción de una forma rápida y analítica utilizando una única ecuación. Aunque es un modelo eficaz en este sentido y proporciona un valor bastante exacto, presenta una serie de limitaciones como que en un principio sólo permitía el cálculo de opciones sobre acciones o que no admite el ejercicio de una opción antes de vencimiento, por lo que no contempla el cálculo de opciones americanas. A parte de esto, no está planteado para valorar opciones sobre acciones que reparten dividendos con demasiada exactitud, lo cual sería algo esencial para tenerla en cuenta en este trabajo.

El modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein utiliza una técnica basada en árboles binomiales a partir de los cuales, para un número determinado de periodos, los resultados que proporciona son prácticamente idénticos que los obtenidos por el método de Black-Scholes. Se trata de un modelo mucho más versátil y, aunque su cálculo pueda ser un poco más laborioso, permite el cálculo de opciones europeas y americanas sobre todo tipo de activos subyacentes y con reparto de dividendos discretos y continuos.

Para el cálculo de los árboles binomiales se han de hallar primero determinadas variables que dependen sobre todo del tipo de interés libre de riesgo y de la volatilidad del activo subyacente. Una vez obtenidas, se procede al cálculo de los posibles precios que pueda tomar el activo subyacente y, en base a estos, calcular el precio de la opción.

Dentro de la valoración de opciones europeas y americanas, es posible determinar a partir de determinados razonamientos matemáticos si una opción europea vale lo mismo que una americana. En el caso de las call la respuesta sería sí, ya que el ejercicio anticipado de la opción americana sería desfavorable y no tendría sentido hacerlo, con lo cual su valor es igual. En cambio, en las put si puede ser beneficioso ejercer antes de vencimiento y obtener el dinero cobrado por el activo subyacente en determinados momentos. Esta ventaja sobre las put europeas hace que las put americanas tengan siempre un precio superior.

Dentro de las opciones sobre acciones, aquellas en las que la acción no reparte dividendos son fáciles de calcular siguiendo la teoría, realizando un árbol para valorar las call, otro para la put europea y otro para la put americana. Sin embargo, si la acción reparte dividendos el procedimiento no es tan sencillo. De hecho, la forma de valorar este tipo de opciones sobre acciones es un tema abierto hoy en día, motivo por el cual existen diferentes modelos de valoración que utilizan un procedimiento otro.

En el trabajo se han presentado cuatro modelos de valoración de este tipo de opciones, los cuales son: el modelo de valoración basado en el rendimiento de Cox, Ross y Rubinstein (1979) o Modelo 0; el Backward Model propuesto por Hull (1996) o Modelo 1; el Forward Model o Modelo 2; el Modelo Log Normal a Trozos propuesto por Lamothe (1993) o Modelo 3.

A partir de la implementación de cada uno de estos cuatro modelos en el software informático 'Matlab', se han obtenido unas tablas de resultados para determinadas opciones, en las cuales se puede ver con mayor claridad y eficacia las variaciones de cada modelo con respecto al Modelo Log Normal a Trozos (Modelo 3), el cual, aunque se supone mucho más difícil de calcular debido a que utiliza un árbol binomial no recombinante, es el que proporciona un valor de la opción más preciso como bien afirman la gran mayoría de autores estudiados. Así pues, se han analizado estas tablas y se han extraído diversas conclusiones.

Con la realización de estas tablas se han comprobado muchos de los razonamientos teóricos que se exponían en capítulos anteriores. A saber:

- Las opciones americanas valen más que las opciones europeas.
- En ausencia de dividendos, las call americanas y europeas valen igual.
- Cuanto mayor es el dividendo repartido, menos valen las call y mas valen las put y viceversa.

Debido al proceso de simplificación utilizado por cada uno, el Backward Model ofrece mejores resultados para casos en los que el reparto del dividendo está cercano al inicio de la vida de la opción. Por el contrario, el Forward Model es más preciso a la hora de calcular el valor de las opciones sobre acciones cuyo dividendo es repartido en fechas más cercanas a la fecha de vencimiento de la opción.

El Modelo 0, basado en un rendimiento constante, proporciona valores bastante exactos, al contrario de lo que podría pensarse en un principio. De hecho, para determinados casos es el modelo cuyos resultados obtenidos son más próximos a los del Modelo 3. Esto resulta un tanto inesperado, ya que, como bien afirma Hull (1996), es mucho más realista considerar que una acción va a repartir una determinada cantidad fija de dividendo ya conocida de antemano a que repartirá el dividendo siguiendo un porcentaje constante según los precios que tome la acción en cada momento.

En este sentido, para investigaciones futuras sería interesante estudiar si la eficacia demostrada en este trabajo por el Modelo 0 es real o es fruto del presente caso aislado y en condiciones distintas o para otro tipo de ejemplos no se obtendrían estos resultados.

# 7. BIBLIOGRAFÍA

## Libros

Adell Ramón, R. y Romeo García, R. (1996). *Opciones y futuros financieros.* Madrid: Pirámide.

Casanovas Ramón, M. (2003). *Opciones financieras* (6ª ed.). Madrid: Pirámide.

Hernández Hernández, F.G. (2003). *Los contratos de futuros: Aplicaciones, fiscalidad y tratamiento contable.* Madrid: Pirámide.

Hull, J. C. (1996). *Introducción a los mercados de futuros y opciones.* Hertfordshire, Inglaterra: Prentice Hall International Ltd.

Lamothe Fernández, P. (1993). *Opciones financieras. Un enfoque fundamental.* Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España.

Puig, X. y Viladot, J. (2001). *Comprender los mercados de futuros.* Barcelona: Gestión 2000.

## Artículos

Bos, R., Gairat, A. y Shepeleva, A. (2003). Dealing with discrete dividends. *Risk, January 2003, 109-112.* Recuperado el 24 de junio de 2013 de: http://www.cmapx.polytechnique.fr/~mazari/NoufelFrikha/Bos_Gairat_Shepeleva_2003.pdf

Cox, J. C., Ross, S. A. y Rubinstein, M. (1979). Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics 7, 229-263* [versión electrónica].

Frishling, V. (2002). A discrete question. *Risk, January 2002.* Recuperado el 24 de junio de 2013 de: http://www.risk.net/data/Pay_per_view/risk/technical/2002/0102_frishling.pdf

Vellekoop, M. H. y Nieuwenhuis, J. W. (2006). Efficient pricing of derivatives on assets with discrete dividends. *Applied Mathematical Finance, Vol. 13, No. 3, 265-284* [versión electrónica]. Recuperado el 25 de junio de 2013 de: http://eprints.eemcs.utwente.nl/8116/01/VellekoopNieuwenhuisDividendsAppliedMathFin.pdf

## Referencias electrónicas

Bolsas y Mercados Españoles (2012). *Reglamento del MEFF.* Recuperado el 13 de mayo de 2013 de: http://www.meff.es/aspx/Comun/Pagina.aspx?l1=Normativa&f=Reglamento

Grandío, A. (2010). *Derivados financieros.* Recuperado el 16 de mayo de 2013 de: http://www.antoniograndiodopico.es/archivos/Universidad/DerivadosFinancieros.pdf

Grandío, A. *Mercado Oficial de futuros y opciones.* Recuperado el 16 de mayo de 2013 de:
http://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=11&ved=0CEoQFjAAO-Ao&url=http%3A%2F%2Fwww.antoniograndiodopico.es%2Farchivos%2Fempresariales%2F3_5%2520Mercado%2520Oficial%2520de%2520Futuros%2520y%2520Opciones%2520%28MEFF%29.doc&ei=70abUcfaC4OR7AbUrYGwCw&usg=AFQjCNEIUofbrmu9nIJu383930--tY_0-A&sig2=215TLnlOEMqcI6TyqmVq3g&bvm=bv.46751780,d.ZGU

Mascareñas, J. (2012). *Mercados de derivados financieros: futuros y opciones* [versión electrónica]. Madrid: Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 13 de mayo de 2013 de: http://pendientedemigracion.ucm.es/info/jmas/mon/42.pdf

## Páginas web

http://www.meff.es/?id=esp Consultada el 13 de mayo de 2013.

https://broker.bankinter.com/www2/broker/es/futuros_opciones/contratos_disponibles/f_acciones_espanolas Consultada el 20 de mayo de 2013.

http://www.youtube.com/watch?v=FBWnxvEC1jA Consultada el 2 de mayo de 2013.

http://www.youtube.com/watch?v=9BgtYbbZTmY Consultada el 2 de mayo de 2013.

http://www.youtube.com/watch?v=3oHtGlLiwAU Consultada el 3 de mayo de 2013.